Előszó

Az I. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt az 5-8. osztályosok számára Dunaszerdahelyen rendezték meg 2014 tavaszán. Ezt követően Nagyvárad, Kecskemét, Beregszász és Szabadka látta vendégül a Kárpát-medence legjobb, általános iskolás korú matematikusait, az idei, immár hatodik verseny házigazdája pedig Lakitelek lehetett. Azon szerencsések közé tartozom, akik részt vettek mindegyik eddigi rendezvényen. Három éve, a kecskeméti versenyen a versenybizottság elnöki feladatait is elláthattam. Ezek után nagy megtiszteltetésnek tekintettem és örömmel vállaltam, amikor a magyarországi régió vezetője, az idei verseny szervezőbizottságának elnöke, Csordás Mihály felkért, hogy az idei évben is koordináljam a feladatsorok összeállítását és irányítsam a versenydolgozatok értékelését.

A verseny feladatsorait a hagyományoknak megfelelően a kollégák által beküldött feladatjavaslatok alapján állítottuk össze. A versenybizottság nevében köszönetet mondok annak a 30 kollégának, akik összesen 201 feladatot javasoltak az idei versenyre. 13 kollégától 69 javaslat érkezett Magyarországról, 7 kollégától 37 javaslat Erdélyből, 5 kollégától 30 javaslat Délvidékről, 3 kollégától 10 javaslat Felvidékről és 2 kollégától 55 javaslat Kárpátaljáról. Egy matematikus az előző számadatok láttán rögtön érdekességet vehetett észre, amelyet a még csak egyetemista Fedorszki Ádám okozott, akinek külön köszönet jár az általa javasolt, igényesen kidolgozott 50 (!) feladatért. A Fedorszki Ádám által beküldött feladatok minőségét jelzi, hogy közülük 7 feladat be is került a kiválasztott feladatok közé. A verseny mindkét versenynapjára, mind a négy évfolyamon 4-4 feladatot kellett kiválasztanunk. A feladatlapokon minden régió képviseltette magát, hiszen a kiválasztott feladatok között 9 anyaországi beküldő 13 feladata, 4 erdélyi beküldő 4 feladata, 3 délvidéki beküldő 5 feladata, 3 felvidéki beküldő 3 feladata, valamint 1 kárpátaljai beküldő 7 feladata szerepelt.

Köszönöm a feladatsorok összeállításában végzett odaadó munkáját a bizottság tagjainak: az 5. osztályos feladatsor felelőse Tassy Gergely, a 6. osztályosé Juhász Péter, a 7. osztályosé Remeténé Orvos Viola, a 8. osztályosé pedig Lányi Vera volt. Ez a kiadvány a velük együtt végzett, több mint egy hónapos közös munkálkodásunk eredménye. Reméljük, hogy nem csak a verseny résztvevőinek lesz szép emlék, de azok számára is hasznos lesz a kis füzet tanulmányozása, akik nem voltak velünk Lakitelken.

Erdős Gábor
a versenybizottság elnöke

Feladatok, 5. osztály

1. Egy játékban minden szótagnak előre meghatározott pontértéke van. Egy szó pontértékét úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk a szótagjainak pontértékét. Ismert a következő szavak pontértéke:

KOLOS: 6 pont KOTOR: 8 pont KOPÁR: 12 pont
TORKOLAT: 16 pont PÁRLAT: 18 pont.

Hány pontot ér a KOLOSTOR szó?

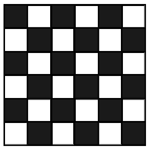
2. Peti kapott két kockát. Az első kocka lapjain az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számok szerepelnek valamilyen sorrendben (minden lapon egy-egy különböző). A második kocka minden lapjára Peti írt rá egy-egy tetszőleges számjegyet. Ezután észrevette, hogy 10 éves korától kezdve mostanáig bármikor ki lehetett volna rakni e két kocka segítségével az életkorát, de egy év múlva ezt már nem lehetne megtenni, még akkor sem, ha máshogy töltötte volna ki a második kocka lapjait. (A 15 például akkor rakható ki, ha az egyik kocka 1-est tartalmazó lapját és a másik kocka 5-öst tartalmazó lapját egymás mellé tesszük. A 6-os számjegyet lefelé fordítva nem olvashatjuk 9-esnek, és a 9-est sem 6-osnak.)

a) Hány éves most Peti?

b) Melyik számokat írhatta Peti a második kocka lapjaira?

3. Valamelyik naptári év folyamán január elseje és április elseje is csütörtökre esik. Hány olyan hónap található ebben az évben, amelyben öt péntek van?

4. Az ábrán látható, 6×6 kis négyzetből álló táblát a lehető legtöbb téglalapra vágtuk szét úgy, hogy a kapott téglalapok területe mind különböző; mindegyikben ugyanannyi fehér négyzet található, mint fekete; továbbá egyik kis négyzet belsejébe sem vágtunk bele.



a) Hány téglalapra vágtuk szét a táblát?

b) Hány különböző módon végezhettük el ezt a szétvágást? (Két szétvágást akkor nevezünk különbözőnek, ha van olyan területű téglalap az egyikben, amilyen területű nincs a másikban.)

5. Az ötödikes Móricka elkezdte leírni egy hosszú papírra az egész számokat 1-től 100-ig egyesével, majd ettől a 100-astól 1-ig visszafelé egyesével, ezután ettől az 1-estől ismét 100-ig egyesével, és így tovább. Az így kapott 1; 2; 3; …; 99; 100; 99; …; 3; 2; 1; 2; 3; … számsor összesen 2019 számból áll.

a) Összesen hány számjegyet írt le eközben Móricka?

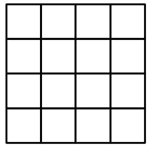
b) Hány darab 0 szerepel a leírt számjegyek között?

6. Az N·M·M·V·L·A·K·I·T·E·L·E·K szorzatban az azonos betűk azonos, a különböző betűk különböző, 0-nál nagyobb számjegyeket jelölnek. Mennyi a szorzat lehető legnagyobb és lehető legkisebb értékének hányadosa?

7. A gonosz Hókuszpók elvarázsolta Aprajafalva összes törpéjét, így néhány törpe mindig igazat mond, a többi pedig mindig hazudik. Ezután egyesével magához hívatta az összes törpét, és megkérdezte mindegyiküket az összes többi törpéről külön-külön, hogy azok igazmondók-e vagy hazugok. Összesen 62-szer kapta azt válaszként, hogy igazmondó, és 70-szer azt, hogy hazug.

a) Hány törpét varázsolt el Hókuszpók?
b) Hány igazmondó lehet az elvarázsolt törpék között?
c) Hány igaz lehet az elhangzott válaszok között?

8. Egy 4×4-es tábla néhány mezőjére egy-egy csokit teszünk. Ezután Gombóc Artúr tetszőlegesen kiválaszt 2 sort és 2 oszlopot, és az azokban lévő csokikat mind megeszi. Mennyi az a lehető legkevesebb számú csoki, amit el tudunk úgy helyezni a táblán, hogy Gombóc Artúr támadása után biztosan maradjon legalább egy csoki a táblán Pom Pomnak is?



Feladatok, 6. osztály

1. Furfangiában az autók rendszáma kétféle lehet: vagy 3 betűt és utána 2 számjegyet tartalmaz (például NMM19), vagy 5 betűt és utána 2 számjegyet (például MATEK19). Az előbbi típust a diplomáciai autók kapják, az utóbbit pedig a többi jármű. Furfangia Diplo kerületében sok követség található. A kerület egyik parkolóházában a beléptető kapu leolvassa a rendszámokat. Az április 30-ai statisztikák azt mutatták, hogy azon a napon 661 betűt és 278 számjegyet olvasott le a rendszer. Hányszor hajtott be diplomáciai autó aznap ebbe a parkolóházba?

2. Berci írt egy programot, amely kiírta a képernyőre növekvő sorrendben azokat az 1000-nél kisebb, pozitív egész számokat, amelyek 2-vel, 3-mal és 4-gyel is oszthatók, és 5-tel osztva 1-et adnak maradékul.
a) Hány számot jelenített meg a képernyőn Berci programja?
b) Melyik volt az első és az utolsó szám, ami megjelent a képernyőn?

3. Egy 5×5-ös négyzetet néhány 4×1-es és 3×1-es téglalapra vágtak szét. (Más méretű alakzat nem keletkezett a szétvágás során.) Hány téglalap keletkezett az egyes fajtákból?

4. Az erdei manók falujában 40-nél kevesebben élnek, mindegyikük milliméterben mért magassága egy-egy pozitív egész szám. Jenő és Rezső a faluban lakó manók. Jenőnél nincs alacsonyabb manó, Rezsőnél pedig nincs magasabb a faluban.
A manók átlagmagassága Rezső nélkül $148\frac{3}{4}$ mm, Jenő nélkül $149\frac{4}{7}$ mm.
a) Összesen hány erdei manó él a faluban?
b) Milyen magas lehet Rezső?

5. Az ábrán egy bűvös négyzet látható, de néhány szám sajnos eltűnt belőle. Tudjuk, hogy a bűvös négyzetek minden sorában, minden oszlopában és mindkét átlójában az ott található három szám összege megegyezik. (Vagyis mind a nyolc háromtagú összeg egyenlő.) Add meg az öt hiányzó számot!

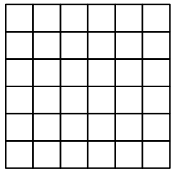
85	61	37
	13	

6. Leírtunk valahonnan kezdve az 5 egymást követő többszörösei közül 16 darabot, majd ezeket az ábrának megfelelően egy-egy csillaggal letakartuk. Tudjuk, hogy az első téglalapban lévő számok összege ugyanannyi, mint a második téglalapban lévőké. Mennyi az első téglalapban lévő számok összege?

$\boxed{*,*,*,*,*,*}\,,*,*,*,*,*,\,\boxed{*,*,*,*,*}$

7. Bodza felírta közvetlenül egymás után, csökkenő sorrendben az összes pozitív egész számot 2019-től 1-ig, így a következő számot kapta:
201920182017.....10987654321.
a) Mennyi maradékot ad a Bodza által felírt szám 6-tal osztva?
b) Bodza alaposan megvizsgálta ezt a számot a papírján, és ha talált legalább három egyforma, 1-nél nagyobb számjegyet közvetlenül egymás mellett, akkor bekarikázta ezeket a számjegyeket. Hány számjegyet karikázott be Bodza?

8. Rita és Kristóf egy 6×6-os négyzetrácson a következő játékot játsszák: Minden lépésben az éppen következő játékos kiválaszt egy sort vagy oszlopot, és annak összes mezőjét befesti a saját színével. Kristóf színe a kék, Ritáé a rózsaszín. (Ha valamelyik mező kék volt, és azt Rita átfesti, akkor az a mező rózsaszín lesz, és fordítva: egy már rózsaszín mezőt Kristóf a lépésével kékre fest.) Kristóf kezd, és felváltva lépnek. Amelyik sort vagy oszlopot valamelyikük egyszer már választotta, azt egyikük sem választhatja ki újra. A játék akkor ér véget, ha már minden sort és minden oszlopot kiválasztotta valamelyikük. Rita nyer, ha a játék végén pontosan 6-tal több rózsaszín mező van, mint kék, egyébként pedig Kristóf a győztes. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Adj meg egy lehetséges nyerő stratégiát!



Feladatok, 7. osztály

1. Egy kétkarú mérleg jobb oldali serpenyőjébe csak piros, a bal oldaliba csak zöld golyókat tettünk. Tudjuk, hogy bármelyik két egyforma színű golyónak egyenlő a tömege. A két serpenyőben összesen 45 darab golyót helyeztünk el, így a mérleg egyensúlyban van. Ha a jobb oldali serpenyőből 11 piros golyót elvennénk, a bal oldali serpenyőből pedig 2 zöld golyót áthelyeznénk a jobb oldaliba, akkor a mérleg ismét egyensúlyban lenne. Hány piros golyó van a jobb oldali serpenyőben?

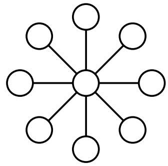
2. Hány különböző, hárommal osztható, négyjegyű pozitív egész szám készíthető a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből, ha egy számhoz mindegyik számjegyet
a) legfeljebb egyszer használhatjuk fel?
b) többször is felhasználhatjuk?

3. Dani tájfutó edzésre jár. Egy edzésről érkezve azt mesélte barátjának, Tóninak, hogy az edzés résztvevői közül mindenkinek pontosan 4 barátja volt jelen az edzésen, és bármelyik két résztvevőnek pontosan 2 közös barátja volt jelen az edzésen. Tóni elgondolkodott, és kijelentette, hogy ez bizony nem lehetséges. Bizonyítsd be, hogy Tóninak igaza van! (A barátságot minden esetben kölcsönösnek tekintjük: ha például András barátja Bélának, akkor Béla is barátja Andrásnak.)

4. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja F. A C csúcsból induló magasságvonal a D pontban, a C csúcsból induló belső szögfelező az E pontban metszi az átfogót. Az FE szakasz kétszer olyan hosszú, mint a DE szakasz. Hány fokosak az ABC háromszög belső szögei?

5. Egy táncest résztvevői közül voltak, akik már ismerték egymást, és voltak, akik még nem. Az est során mindegyik lány egy-egy álmodozó pillantást vetett mindegyik számára ismerős fiúra, de senki másra nem. Ugyanakkor mindegyik fiú egy-egy álmodozó pillantást vetett mindegyik számára ismeretlen lányra, de senki másra nem. A résztvevők összesen 180 álmodozó pillantást vetettek.
(Az ismeretségek kölcsönösek: ha például Pisti ismeri Terit, akkor Teri is ismeri Pistit.)
a) Hányan lehettek ezen a táncesten, ha az eddig elmondottakon kívül csak annyit tudunk, hogy a résztvevők száma kevesebb volt 40-nél?
b) Hány 13 éves lány lehetett ezen a táncesten, ha még azt is tudjuk, hogy mindegyik résztvevő 13 vagy 14 éves volt, és a lányok életkorának összege 240 volt?

6. Írd be az ábrán látható körökbe az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számokat úgy, hogy ha kiszámoljuk a berajzolt egyenesek mentén a három-három beírt szám összegét, akkor négy egymást követő számot kapjunk! Melyik szám kerülhet a középső körbe?
(Mindegyik körbe egy számot írunk, és mindegyik számot egyszer használjuk fel.)



7. Az ABC háromszög AB és AC oldala egyenlő hosszú. Legyen az AC oldal felezőpontja D. Vegyük fel az E pontot úgy, hogy a BE szakasz felezőpontja D legyen, az F pontot pedig úgy, hogy a DF szakasz felezőpontja illeszkedjen a BC oldal egyenesére, és a DF szakasz merőleges legyen a BC oldal egyenesére.
a) Igazold, hogy az E, C és F pontok egy egyenesre illeszkednek!
b) Hányszorosa az $ABFE$ négyszög területe az ABC háromszög területének?

8. Egy futóversenyen mind a 75 induló célba ért. Holtverseny nem volt, vagyis az 1.; 2.; 3.; …; 74.; 75. helyezések mindegyikét pontosan egy versenyző szerezte meg. A verseny előtt minden induló megtippelte, hogy hányadikként fog célba érni. Mindannyian mondtak egy-egy 0-nál nagyobb, 76-nál kisebb egész számot, amelyek összege pontosan 2019 volt. Hányan lehettek azok a versenyzők, akik eltalálták a saját helyezésüket?

Feladatok, 8. osztály

1. Pisti leírt egy háromjegyű pozitív egész számot, amelynek egyik számjegye sem nulla, és mindhárom számjegye különböző. A Pisti által leírt szám egyenlő a számjegyeiből alkotható hat különböző kétjegyű szám összegével. Melyik számot írhatta le Pisti?

2. Teri Kecskeméten született. Egyik délután szülővárosának betűit írja be egy 3×3-as táblázat 9 négyzetébe úgy, hogy mindegyik négyzetbe egy betűt ír, először a K betűt helyezi el valamelyik négyzetben, majd sorban egymás után a többi betűt (K; E; C; S; K; E; M; É; T sorrendben) úgy, hogy a következő betűt mindig az előzőleg beírt betűvel szomszédos négyzetbe írja. (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldaluk.)
a) Hányféleképpen töltheti ki Teri a táblázatot?
b) Hányféleképpen töltheti ki Teri úgy a táblázatot, hogy minden sorba és minden oszlopba egy magánhangzó kerüljön?

3. A VI. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik délutánján sakkversenyt hirdettek a hetedik és nyolcadik évfolyamosok számára. Mindegyik játékos mindegyik ellenfelével egy játszmát játszott. Mindegyik játszma után a nyertes 1 pontot kapott, a vesztes 0 pontot, ha pedig döntetlenre végződött a parti, akkor mindkét játékos fél-fél pontot kapott. A verseny végén kiderült, hogy 9-szer annyi hetedikes vett részt a versenyen, mint a nyolcadikos; illetve a hetedikesek által szerzett összpontszám 4-szer annyi volt, mint a nyolcadikosok által szerzett. Hány pontot ért el Karcsi, a legeredményesebb nyolcadik évfolyamos versenyző?

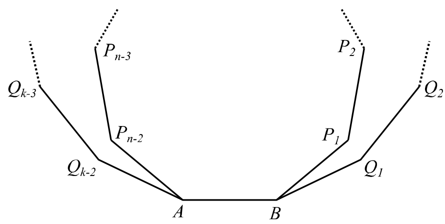
4. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F. A BC oldal egyik belső pontja D, az FD egyenes az AC oldal C-n túli meghosszabbítását az E pontban metszi. Tudjuk, hogy a BDF és a DEC háromszögek területe egyenlő. Legyen a D ponton át az AB oldallal húzott párhuzamos egyenes és a BE szakasz metszéspontja P, az AP és a CF szakaszok metszéspontja pedig Q.
a) Bizonyítsd be, hogy a $BECF$ négyszög trapéz!
b) Bizonyítsd be, hogy a $BPCQ$ négyszög paralelogramma!

5. Egy téglalap területe 4,9 m^2, kerülete pedig 9,8 m. Határozd meg a téglalap oldalainak hosszát, ha tudjuk, hogy azok deciméterben kifejezve egész számok!

6. Egy hétjegyű számot nevezzünk *bűvösnek*, ha osztható összes számjegyének szorzatával.
a) Három egymást követő hétjegyű szám mindegyike bűvös. Melyek lehetnek ezek a számok?
b) Lehet-e találni négy egymást követő hétjegyű bűvös számot?

7. Amikor a hét törpe leült egy kerek asztalhoz, Hófehérke elhatározta, hogy mindegyikük fejére tesz egy-egy piros, sárga, kék vagy zöld sapkát. Kuka rögtön kikönyörögte, hogy ő mindenképpen piros sapkát kapjon. Abban minden törpe egyetértett, hogy az egymás mellett ülők különböző színű sapkát kapjanak. Hányféleképpen tudta Hófehérke kiosztani a sapkákat a feltételeknek megfelelően? (Mindegyik színű sapkából van legalább 7 darab.)

8. Az $ABQ_1Q_2...Q_{k-2}$ szabályos k oldalú sokszög belsejében helyezkedik el az $ABP_1P_2...P_{n-2}$ szabályos n oldalú sokszög $(k > n)$. Létezik-e olyan k és n, amelyek esetén a Q_1, P_1 és P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek?



Megoldások, 5. osztály

1. Egy játékban minden szótagnak előre meghatározott pontértéke van. Egy szó pontértékét úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk a szótagjainak pontértékét. Ismert a következő szavak pontértéke:

KOLOS: 6 pont KOTOR: 8 pont KOPÁR: 12 pont
TORKOLAT: 16 pont PÁRLAT: 18 pont.

Hány pontot ér a KOLOSTOR szó?

(Végh Erika, Kőszeg)

Megoldás: A TORKOLAT és a KOTOR szavak csak a LAT szótagban különböznek, így a LAT szótag $16-8=8$ pontot ér. Ekkor a PÁRLAT szó alapján a PÁR szótag értéke $18-8=10$ pont. Mivel a KOPÁR szó értéke 12 pont, ezért a KO szótag $12-10=2$ pontot ér. A KOTOR szó értékéből megtudjuk, hogy a TOR szótag értéke $8-2=6$ pont. A KOLOSTOR szó a TOR szótaggal hosszabb, mint a KOLOS szó, így pontértéke is 6 ponttal több a KOLOS szó értékénél, azaz a KOLOSTOR szó $6+6=12$ pontot ér.

2. Peti kapott két kockát. Az első kocka lapjain az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számok szerepelnek valamilyen sorrendben (minden lapon egy-egy különböző). A második kocka minden lapjára Peti írt rá egy-egy tetszőleges számjegyet. Ezután észrevette, hogy 10 éves korától kezdve mostanáig bármikor ki lehetett volna rakni e két kocka segítségével az éveinek számát, de egy év múlva ezt már nem lehetne megtenni, még akkor sem, ha máshogy töltötte volna ki a második kocka lapjait. (A 15 például akkor rakható ki, ha az egyik kocka 1-est tartalmazó lapját és a másik kocka 5-öst tartalmazó lapját egymás mellé tesszük. A 6-os számjegyet lefelé fordítva nem olvashatjuk 9-esnek, és a 9-est sem 6-osnak.)

a) Hány éves most Peti?
b) Melyik számokat írhatta Peti a második kocka lapjaira?

(Kozma Katalin Abigél, Győr)

Megoldás:
Ahhoz, hogy a 10 kirakható legyen, a másik kocka egyik lapjára 0-t kell írni. A 11 kirakásához két darab 1-es számjegy szükséges, így a másik kocka egyik lapjára 1-est kell írni. Ezt az egyest a tízes helyi értéken használva kirakhatók a 12; 13; 14; 15; 16 számok. Ahhoz, hogy a következő három számot ki lehessen rakni, a másik kocka egy-egy lapjára a 7; 8; 9 számjegyeket kell írnia Petinek. Ezeket az egyes helyi értéken, az első kocka 1-es számjegyét pedig a tízes helyi értéken használva a 17; 18; 19 számok is kirakhatók. Az első kocka 2-es és a második kocka 0-s számjegyével kirakható a 20, az első kocka 2-es és a második kocka 1-es számjegyével kirakható a 21. Ahhoz, hogy a 22 is kirakható legyen, mindkét kockán kell lennie 2-esnek, ezért a második kocka egyetlen még üres

lapjára 2-est kell írnia Petinek. A második kocka 2-es számjegyét a tízes helyi értéken használva kirakható a 23; 24; 25; 26; az első kocka 2-es számjegyét a tízes helyi értéken használva kirakható a 27; 28; 29; az első kocka 3-as számjegyét a tízes helyi értéken használva kirakható a 30; 31; 32. A második kockának már nincsen üres lapja, így csak az első kockán van 3-as számjegy, ezért a 33 a legkisebb olyan szám, amelyet nem tud kirakni Peti. Peti tehát most 32 éves, és a második kockára a 0; 1; 2; 7; 8; 9 számokat kellett írnia.

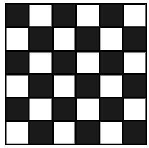
3. Valamelyik naptári év folyamán január elseje és április elseje is csütörtökre esik. Hány olyan hónap található ebben az évben, amelyben öt péntek van?

(Tóth Gabriella, Csantavér)

Első megoldás: Nézzük végig a hónapokat, melyik milyen nappal kezdődik. A január 31 napos és csütörtökkel kezdődik, így az utolsó három napja csütörtök, péntek és szombat, ezért a február első napja vasárnap. Hasonlóan gondolkodva, ha nem szökőévről lenne szó, akkor a március vasárnappal, az április pedig szerdával kezdődne. Ez nem felel meg a feltételeknek, tehát szökőévről van szó. Ez azt jelenti, hogy a március hétfővel, az április csütörtökkel kezdődik. A többi hónap első napja: májusé szombat, júniusé kedd, júliusé csütörtök, augusztusé vasárnap, szeptemberé szerda, októberé péntek, novemberé hétfő, decemberé szerda. Vizsgáljuk most a péntekek számát aszerint, hogy melyik hónap hány napos. A február 29 napos, vasárnappal kezdődik, így ebben a hónapban csak négy péntek van. A 30 napos hónapokban akkor lehet öt péntek, ha csütörtökkel vagy péntekkel kezdődnek, ilyen hónap egy van ebben az évben, az április. A 31 napos hónapokban akkor lehet öt péntek, ha szerdával, csütörtökkel vagy péntekkel kezdődnek, ilyen hónapok ebben az évben a január, a július, az október és a december. Tehát összesen 5 olyan hónap van ebben az évben, amely öt pénteket tartalmaz.

Második megoldás: Ha az adott év nem szökőév, akkor a két dátum között $31+28+31=90$ nap telik el; ha szökőév, akkor pedig 1 nappal több, vagyis 91 nap. A két dátum ugyanolyan napra esik, így a közöttük eltelt napok száma osztható 7-tel. Mivel $91:7=13$, ezért szökőévről van szó, amely 366 napból áll. Az év 52 teljes hétből és még 2 napból áll, hiszen $366=52\cdot 7+2$. Tudjuk, hogy az év csütörtökkel kezdődik, ezért utolsó két napja csütörtök és péntek lesz, azaz ebben az évben 53-53 csütörtök és péntek lesz, a többi napból pedig 52-52 darab. Minden hónap tartalmaz legalább 4 teljes hetet, vagyis 4 pénteket, és egyik hónapban sem lehet 5-nél több péntek, hiszen akkor ebben a hónapban legalább 36 napnak kellene lennie. Osszuk szét most a péntekeket a hónapok között. Mind a 12 hónapnak biztosan kell adnunk 4 pénteket, így eddig szétosztottunk 48 pénteket. A megmaradó péntekeket csak különböző hónapoknak adhatjuk, különben lenne olyan hónap, amelyben 5-nél több péntek van. Mivel 5 péntek maradt meg, ezért 5 olyan hónap van ebben az évben, amely öt pénteket tartalmaz.

4. Az ábrán látható, 6×6 kis négyzetből álló táblát a lehető legtöbb téglalapra vágtuk szét úgy, hogy a kapott téglalapok területe mind különböző; mindegyikben ugyanannyi fehér négyzet található, mint fekete; továbbá egyik kis négyzet belsejébe sem vágtunk bele.



a) Hány téglalapra vágtuk szét a táblát?

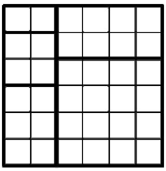
b) Hány különböző módon végezhettük el ezt a szétvágást? (Két szétvágást akkor nevezünk különbözőnek, ha van olyan területű téglalap az egyikben, amilyen területű nincs a másikban.)

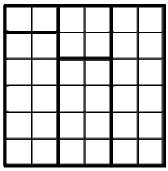
(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás: Ha mindegyik keletkező téglalap ugyanannyi fehér és fekete négyzetet tartalmaz, akkor mindegyik keletkező téglalap páros sok kis négyzetből áll. A részek száma nem lehet 6 vagy annál több, mivel már a hat legkisebb területű megfelelő téglalap is összesen $2+4+6+8+10+12=42$ kis négyzetből állna, ami nem lehetséges, hiszen az eredeti tábla csak 36 négyzetet tartalmaz. A 36-ot 5 különböző pozitív páros szám összegére háromféleképpen lehet felbontani:

$$36=2+4+6+8+16=2+4+6+10+14=2+4+8+10+12.$$

Ezek közül a másodiknak megfelelő szétdarabolás biztosan nem végezhető el, hiszen a 14 négyzetből álló téglalap csak 2×7-es vagy 1×14-es lehetne, de ilyent egy 6×6-os táblából nem lehet kivágni. A másik két esetben a feldarabolás elvégezhető, például az alábbi ábrákon látható módon:





Tehát a táblát 5 téglalapra vágtuk szét, és a darabolást két különböző módon végezhettük el.

5. Az ötödikes Móricka elkezdte leírni egy hosszú papírra az egész számokat 1-től 100-ig egyesével, majd ettől a 100-astól 1-ig visszafelé egyesével, ezután ettől az 1-estől ismét 100-ig egyesével, és így tovább. Az így kapott 1; 2; 3; …; 99; 100; 99; …; 3; 2; 1; 2; 3; … számsor összesen 2019 számból áll.

a) Összesen hány számjegyet írt le eközben Móricka?

b) Hány darab 0 szerepel a leírt számjegyek között?

(Oláh Miklós, Kraszna)

Megoldás:
a) Vizsgáljuk meg az 1; 2; 3; …; 99; 100; 99; …; 3; 2 számsort. Ez összesen $9+8=17$ egyjegyű, $2\cdot 90=180$ kétjegyű és 1 háromjegyű számból áll, tehát összesen $17+180+1=198$ számot és $17\cdot 1+180\cdot 2+1\cdot 3=380$ számjegyet tartalmaz. Mivel a 2019-et 198-cal osztva a hányados 10, a maradék pedig 39, így Móricka tízszer írta le az előbb vizsgált számsort, valamint leírt még 39 számot. A tízszer leírt számsor összesen $10\cdot 380=3800$ számjegyből áll, az 1; 2; …; 38; 39 számok pedig további $9\cdot 1+30\cdot 2=69$ számjegyből, ezért Móricka összesen 3869 számjegyet írt le.
b) Az a) részben vizsgált számsorban kétszer szerepelnek a 10; 20; 30; …; 80; 90 számok, ezek összesen $2\cdot 9=18$ darab 0-t tartalmaznak, a 100 pedig további két darabot, tehát a vizsgált számsorban összesen 20 darab 0 van. Mivel Móricka ezt a számsort tízszer írta le, valamint még egyszer leírta a 10, 20, 30 számokat, így az összesen leírt 0-k száma $10\cdot 20+3=203$.

6. Az N·M·M·V·L·A·K·I·T·E·L·E·K szorzatban az azonos betűk azonos, a különböző betűk különböző, 0-nál nagyobb számjegyeket jelölnek. Mennyi a szorzat lehető legnagyobb és lehető legkisebb értékének hányadosa?

(Csordás Mihály, Kecskemét)

Megoldás: A szorzat 9-féle betűt tartalmaz (N; M; V; L; A; K; I; T; E), ezért mind a 9 pozitív számjegy megfelel valamelyik betűnek. Mivel 4 betű (M; L; K; E) kétszer szerepel, ezért a szorzat akkor lesz a legnagyobb, ha ezek helyére a 9; 8; 7; 6 számjegyeket írjuk, és akkor lesz a legkisebb, ha ezek helyére az 1; 2; 3; 4 számjegyeket írjuk, tetszőleges sorrendben. Mivel mindegyik számjegy mindkét szorzatban legalább egyszer szerepel, így amikor elosztjuk egymással a két szorzatot, akkor mindegyik számjeggyel egy alkalommal tudunk egyszerűsíteni. A két szorzat hányadosa ezen egyszerűsítések után $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=3\cdot 7\cdot 6$, tehát a keresett hányados értéke 126.

7. A gonosz Hókuszpók elvarázsolta Aprajafalva összes törpéjét, így néhány törpe mindig igazat mond, a többi pedig mindig hazudik. Ezután egyesével magához hívatta az összes törpét, és megkérdezte mindegyiküket az összes többi törpéről külön-külön, hogy azok igazmondók-e vagy hazugok. Összesen 62-szer kapta azt válaszként, hogy igazmondó, és 70-szer azt, hogy hazug.
a) Hány törpét varázsolt el Hókuszpók?
b) Hány igazmondó lehet az elvarázsolt törpék között?
c) Hány igaz lehet az elhangzott válaszok között?

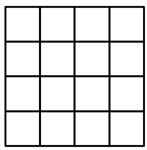
(Fedorszki Ádám, Beregszász)

Megoldás:
a) A törpék összesen $62+70=132$ kérdésre válaszoltak. Mivel Hókuszpók mindegyik törpét megkérdezte az összes többiről, így mindegyikük eggyel kevesebbszer válaszolt, mint amennyi a törpék száma. A válaszok számát tehát úgy is megkaphatjuk, ha a törpék számát megszorozzuk a törpék számánál eggyel kisebb számmal. Mivel $132=12\cdot 11$, ezért az elvarázsolt törpék száma 12 volt.

b) Az „igazmondó” választ vagy igazmondó mondhatta igazmondóról, vagy hazug hazugról. Hasonlóan a „hazug” választ vagy igazmondó mondhatta hazugról, vagy hazug igazmondóról. Így mindegyik igazmondó-hazug pár esetén kétszer hangzott el a „hazug” válasz, ami azt jelenti, hogy az igazmondó-hazug párok száma $70:2=35$. Az igazmondó-hazug párok számát megkapjuk, ha az igazmondók számát megszorozzuk a hazugok számával. A 35-öt kétféleképpen lehet két pozitív egész szám szorzatára bontani: $35=1\cdot 35=5\cdot 7$. Mivel az igazmondók és a hazugok számának összege 12, így csak a második felbontás ad megoldást, tehát az igazmondók száma 5 vagy 7 lehet.
c) Ha az igazmondók száma 5, akkor ők mindenkiről igazat mondanak, így az igaz válaszok száma $5\cdot 11=55$. (Az a válasz, hogy „igazmondó”, $5\cdot 4=20$ alkalommal hangzik el, az pedig, hogy „hazug”, $5\cdot 7=35$ alkalommal.) Ha az igazmondók száma 7, akkor az igaz válaszok száma $7\cdot 11=77$. (42 alkalommal hangzik el, hogy „igazmondó” és 35 alkalommal, hogy „hazug”.)

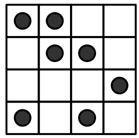
A b) rész második megoldása: Ha mindenki igazmondó vagy mindenki hazug lenne, akkor mindenki azt mondaná az összes többiről, hogy azok igazmondók, tehát ez az eset nem állhat fenn. Ha 1 igazmondó lenne és 11 hazug, akkor az igazmondó 11-szer mondaná, hogy „hazug”, a hazugok pedig mind a 11-en 1-1 alkalommal mondanák ugyanezt az igazmondóról, így összesen 22-szer hangozna el a „hazug” válasz. Ez az eset sem lehetséges. Ugyanez lenne a helyzet fordítva, ha 1 igazmondó és 11 hazug lenne. Hasonlóan végigszámolva, ha az igazmondók száma rendre 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 lenne, akkor a „hazug” válaszok száma rendre 40; 54; 64; 70; 72; 70; 64; 54; 40 lenne, tehát az igazmondók száma 5 vagy 7 lehet.

8. Egy 4×4-es tábla néhány mezőjére egy-egy csokit teszünk. Ezután Gombóc Artúr tetszőlegesen kiválaszt 2 sort és 2 oszlopot, és az azokban lévő csokikat mind megeszi. Mennyi az a lehető legkevesebb számú csoki, amit el tudunk úgy helyezni a táblán, hogy Gombóc Artúr támadása után biztosan maradjon legalább egy csoki a táblán Pom Pomnak is?



(Kekenák Szilvia, Kassa)

Megoldás: Először lássuk be, hogy akárhogy helyezünk el 6 vagy kevesebb csokit, Gombóc Artúr meg tudja enni a feladatban szereplő szabályokkal az összeset. Nevezzük egy lépésnek azt, hogy Gombóc Artúr kiválaszt egy sort vagy egy oszlopot, és megeszi az összes abban található csokit. Ha valamelyik sorban 3 vagy 4 csoki van, akkor az első lépésben ezeket megeszi. Ezt követően legfeljebb 3 csoki marad a táblán. Ezeket a csokikat meg tudja enni további három lépésben, a csoki sorát vagy oszlopát választva. Ha egyik sorban sincs 3 vagy 4 csoki, akkor mindegyikben legfeljebb 2 csoki lehet. Mivel a sorok száma 4, így van legalább 2 olyan sor, amelyekben 2-2 csoki található. Ha Gombóc Artúr az első két lépésben ezt a két sort választja, akkor legfeljebb 2 csoki marad a táblán. Ezt a két csokit további két lépésben meg tudja enni, a csokik oszlopát választva. Vagyis ahhoz, hogy Gombóc Artúr támadása után is biztosan maradjon csoki a táblán, a csokik száma nem lehet kevesebb 7-nél.



A feladat megoldásához tartozik annak megmutatása is, hogy 7 csokit viszont el lehet helyezni megfelelően, például az ábrán látható módon. Mindegy, hogy Gombóc Artúr először sorokat vagy oszlopokat választ. Tegyük fel, hogy 2 sort választ először. Végig lehet gondolni, hogy bármelyik 2 sort választja is (ez 6 eset), mindig lesz 3 olyan oszlop, amelyekben még marad csoki, így ezeket nem tudja megenni 2 oszlop választásával.

Megoldások, 6. osztály

1. Furfangiában az autók rendszáma kétféle lehet: vagy 3 betűt és utána 2 számjegyet tartalmaz (például NMM19), vagy 5 betűt és utána 2 számjegyet (például MATEK19). Az előbbi típust a diplomáciai autók kapják, az utóbbit pedig a többi jármű. Furfangia Diplo kerületében sok követség található. A kerület egyik parkolóházában a beléptető kapu leolvassa a rendszámokat. Az április 30-ai statisztikák azt mutatták, hogy azon a napon 661 betűt és 278 számjegyet olvasott le a rendszer. Hányszor hajtott be diplomáciai autó aznap ebbe a parkolóházba?

(Juhász Nándor, Szeged)

Első megoldás: Mivel mindegyik autó rendszáma két számjegyet tartalmaz, ezért az említett napon $278:2=139$ alkalommal hajtott be autó a parkolóházba. Ha ezek mindegyike diplomáciai autó lett volna, akkor a rendszámaikban összesen $139\cdot 3=417$ betű szerepelt volna. Mivel a betűk száma ennél $661-417=244$-gyel több volt, és mindegyik nem diplomáciai autó rendszámán kettővel több betű szerepel, mint a diplomáciai autók rendszámán, ezért $244:2=122$ alkalommal hajtott be nem diplomáciai autó aznap a parkolóházba, tehát $139-122=17$-szer hajtott be oda diplomáciai autó ezen a napon.

Második megoldás: Jelöljük d-vel, illetve e-vel azt, hogy hányszor hajtott be aznap diplomáciai, illetve egyéb autó a parkolóházba. A rendszámokon szereplő betűk száma alapján felírható a $3d+5e=661$ egyenlet, a számjegyek száma alapján pedig a $2d+2e=278$ egyenlet. Az utóbbi egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva kapjuk, hogy $d+e=139$, amelyből $e=139-d$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$3d+5\cdot(139-d)=661.$$

A zárójelek felbontása és összevonás után adódik, hogy $695-2d=661$, ahonnan $34=2d$, tehát $d=17$.

Tehát a parkolóházba 17-szer hajtott be diplomáciai autó ezen a napon.

2. Berci írt egy programot, amely kiírta a képernyőre növekvő sorrendben azokat az 1000-nél kisebb, pozitív egész számokat, amelyek 2-vel, 3-mal és 4-gyel is oszthatók, és 5-tel osztva 1-et adnak maradékul.

a) Hány számot jelenített meg a képernyőn Berci programja?

b) Melyik volt az első és az utolsó szám, ami megjelent a képernyőn?

(Szabó Magda, Szabadka)

Megoldás: Azok a számok, amelyek oszthatók 2-vel, 3-mal és 4-gyel is, azok oszthatók a három szám legkisebb közös többszörösével, vagyis 12-vel is. Azok a számok, amelyek 5-tel osztva 1 maradékot adnak, 1-re vagy 6-ra végződhetnek. A 12 többszörösei párosak, így nem végződhetnek 1-re. A 12 olyan többszöröseit keressük tehát, amelyek 6-ra végződnek. Ehhez a 12-t olyan számmal kell megszorozni, amelyik 3-ra vagy 8-ra végződik, azaz 5-tel osztva 3 maradékot ad. A keresett szám tehát $12\cdot(5k+3)=60k+36$ alakú, ahol k egy nemnegatív egész szám. A képernyőn azok a számok jelennek meg, amelyekre teljesül a $60k+36<1000$ egyenlőtlenség. Az egyenlőtlenség mindkét oldalából 36-ot kivonva, majd 60-nal osztva kapjuk, hogy $k<16\frac{4}{60}$, vagyis k értéke lehet 0; 1; 2; 3; 4; …; 15; 16. Tehát Berci programja 17 számot írt ki a képernyőre.

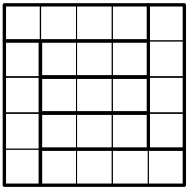
Az első szám, ami megjelenik a képernyőn, a $60\cdot0+36=36$,

az utolsó szám pedig, ami megjelenik a képernyőn, a $60\cdot16+36=996$.

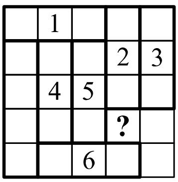
3. Egy 5×5-ös négyzetet néhány 4×1-es és 3×1-es téglalapra vágtak szét. (Más méretű alakzat nem keletkezett a szétvágás során.) Hány téglalap keletkezett az egyes fajtákból?

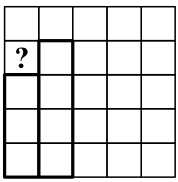
(Fedorszki Ádám, Beregszász)

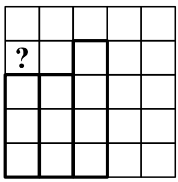
Első megoldás: A négyzet területe 25 egység, a keletkező téglalapoké 4, illetve 3 egység. Nem lehet az összes keletkező téglalap 4×1-es, mivel a 25 nem osztható 4-gyel. Hasonlóan nem lehet a 3×1-es téglalapok száma páros, mert akkor a 4×1-esek területösszegének páratlannak kellene lennie, ami nem lehetséges. Nem lehet 1 darab 3×1-es téglalap, mert a $25-1\cdot3=22$ nem osztható 4-gyel.
Ha a 3×1-esek száma 3, akkor a 4×1-esek száma $(25-3\cdot3):4=4$.
Ez az eset lehetséges, amint ezt az alábbi ábra is mutatja.



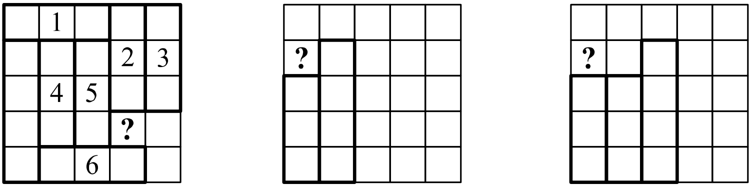
Nem lehet 5 darab 3×1-es téglalap, mert a $25-5\cdot3=10$ nem osztható 4-gyel.
Ha a 3×1-esek száma 7, akkor a 4×1-esek száma $(25-7\cdot3):4=1$. Ez az eset azonban nem lehetséges. A 4×1-es téglalap az alábbi ábrákon látható három lényegesen különböző módon vágható ki, hiszen annak összes lehetséges elhelyezkedése megkapható tükrözéssel és forgatással az alábbi ábrák egyikéből. Ezt követően az ábrára berajzolt 3×1-es téglalapok helyzete egyértelmű, és mindhárom esetben látható, hogy a szétvágás nem fejezhető be.



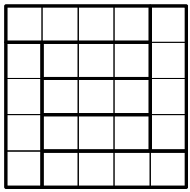




Második megoldás: Legyen a 3×1-es darabok száma x, a 4×1-es darabok száma pedig y. A téglalapok területére felírható a következő egyenlet: $3x+4y=25$. A $3x$ osztható 3-mal, a 25 pedig 3-mal osztva 1 maradékot ad, ezért a $4y$-nak a 3-as maradéka is 1. Mivel a 4-nek a 3-as maradéka 1, így az y-nak is 1 a 3-as maradéka. Másrészt $4y\le25$, ezért y nem lehet nagyobb 4-nél, tehát $y=1$ vagy $y=4$.
Ha $y=1$, akkor a fenti egyenlet alapján $x=7$. Ez az eset azonban nem lehetséges. A 4×1-es téglalap a következő oldali ábrákon látható három lényegesen különböző módon vágható ki, hiszen annak összes lehetséges elhelyezkedése megkapható tükrözéssel és forgatással az ábrák egyikéből. Ezt követően az ábrára berajzolt 3×1-es téglalapok helyzete egyértelmű, és mindhárom esetben látható, hogy a szétvágás nem fejezhető be.



Ha $y = 4$, akkor a fenti egyenlet alapján $x = 3$. Ez az eset lehetséges, amint ezt az alábbi ábra is mutatja.



4. Az erdei manók falujában 40-nél kevesebben élnek, mindegyikük milliméterben mért magassága egy-egy pozitív egész szám. Jenő és Rezső a faluban lakó manók. Jenőnél nincs alacsonyabb manó, Rezsőnél pedig nincs magasabb a faluban. A manók átlagmagassága Rezső nélkül $148\frac{3}{4}$ mm, Jenő nélkül $149\frac{4}{7}$ mm.

a) Összesen hány erdei manó él a faluban?
b) Milyen magas lehet Rezső?

(Fedorszki Ádám, Beregszász)

Megoldás:

a) A manók átlagmagassága Rezső nélkül $148\frac{3}{4} = \frac{595}{4}$ mm, Jenő nélkül pedig $149\frac{4}{7} = \frac{1047}{7}$ mm. Mindkét esetben egy híján az összes manó átlagmagasságát számoltuk, így a két tört nevezője a manók számánál eggyel kisebb szám volt. A két tört számlálója is egész szám volt, így egyszerűsítés után úgy lehetett a két nevező 4 és 7, ha az egyszerűsítés előtt a nevező osztható volt 4-gyel és 7-tel is. Mivel a nevező legfeljebb 39 lehetett, így egyetlen lehetséges értéke 28. Tehát a faluban összesen 29 manó él.

b) Mivel $\frac{595}{4} = \frac{4165}{28}$ és $\frac{1047}{7} = \frac{4188}{28}$, így a manók testmagasságainak összege Rezső nélkül 4165 mm, Jenő nélkül pedig 4188 mm. Az elmondottak alapján Rezső $4188 - 4165 = 23$ milliméterrel magasabb Jenőnél.
Ha Rezső 149 mm magas vagy ennél alacsonyabb lenne, akkor a 28 legmaga-

sabb manó átlagmagassága nem lehetne 149 milliméternél nagyobb. Tehát Rezső legalább 150 mm magas. Ez az eset lehetséges. Ekkor Jenő $150-23=127$ mm magas, a többiek magasságának összege $4165-127=4038$ mm. Lehet 12 manó 149 mm és 15 manó 150 mm magas, mert $12\cdot 149+15\cdot 150=4038$.

Ha Jenő 149 mm magas vagy ennél magasabb lenne, akkor nem lehetne a 28 legalacsonyabb manó átlagmagassága 149 milliméternél kisebb. Tehát Jenő legfeljebb 148 mm magas, ezek szerint Rezső lehetséges legnagyobb testmagassága $148+23=171$ mm. Ez az eset is lehetséges. A többi 27 manó magasságának összege $4165-148=4017$ mm. Lehet például 6 manó 148 mm és 21 manó 149 mm magas, mert $6\cdot 148+21\cdot 149=4017$.

Rezső testmagassága lehet a két említett érték közötti tetszőleges egész számú milliméter. Induljunk ki ugyanis az első esetből. Ha Rezső 1 milliméterrel magasabb, akkor Jenő is, és a többi 27 törpe testmagasságának összege is 1 milliméterrel csökken. Erre adható konstrukció például úgy, hogy az első esethez adott konstrukcióban egy 150-et 149-re cserélünk. Az eljárást tovább folytathatjuk úgy, hogy először a 150-eket cseréljük 149-re, majd ha már nem tartalmaz az összeg 150-et, akkor a 149-et cseréljük 148-ra. Ezzel az eljárással végül eljutunk a második megadott konstrukcióhoz. Mivel mindegyik esetben a 27 törpe 148, 149 vagy 150 mm magas volt, így egyikük sem volt alacsonyabb Jenőnél vagy magasabb Rezsőnél.

Megjegyzés: Nem teljes a megoldás, ha csak azt igazoljuk, hogy Rezső magasságának legkisebb lehetséges értéke 150 mm, legnagyobb lehetséges értéke pedig 171 mm, hiszen ebből még nem következik, hogy Rezső testmagassága lehet 151; 152; 153; …; 169; 170 mm is. Ezt is be kell bizonyítani, vagy konkrétan meg kell adni minden esetben egy-egy konstrukciót, vagy meg kell mutatni, például az itt leírt módon, hogy hogyan juthatunk el a megfelelő konstrukciókhoz.

5. Az ábrán egy bűvös négyzet látható, de néhány szám sajnos eltűnt belőle. Tudjuk, hogy a bűvös négyzetek minden sorában, minden oszlopában és mindkét átlójában az ott található három szám öszszege megegyezik. (Vagyis mind a nyolc háromtagú összeg egyenlő.) Add meg az öt hiányzó számot!

85	61	37
	13	

(Dr. Kiss Sándor, Nyíregyháza)

Megoldás: Jelöljük a hiányzó számokat betűkkel. Az úgynevezett bűvös összeg a második sor alapján $85+61+37=183$. A második oszlop alapján $b=183-(61+13)=183-74=109$. Nézzük a harmadik sort és a harmadik oszlopot. Az e mindkettőben szerepel, a 37 pedig 24-gyel nagyobb a 13-nál, ezért a d 24-gyel nagyobb a c-nél. A bal alsó négyzetet tartalmazó átlóban $d+61+c=183$, így $d+c=183-61=122$. Ezt a 122-t kell úgy két szám összegére bontani, hogy az

a	b	c
85	61	37
d	13	e

egyik 24-gyel legyen nagyobb, mint a másik. Ha a nagyobb számból kivonunk 24-et, akkor egyrészt a két szám egyenlő lesz, másrészt összegük 24-gyel csökken, azaz $122-24=98$ lesz. A kisebbik szám, vagyis $c=98:2=49$, ezért $d=49+24=73$. Mivel most már a két szélső oszlopban is két-két szám ismert, ezért a harmadik kiszámolható:

az első oszlop alapján $a=183-(85+73)=183-158=25$,

a harmadik oszlop alapján $e=183-(49+37)=183-86=97$.

A kitöltött táblázat az alábbi ábrán látható:

25	109	49
85	61	37
73	13	97

6. Leírtunk valahonnan kezdve az 5 egymást követő többszörösei közül 16 darabot, majd ezeket az ábrának megfelelően egy-egy csillaggal letakartuk. Tudjuk, hogy az első téglalapban lévő számok összege ugyanannyi, mint a második téglalapban lévőké. Mennyi az első téglalapban lévő számok összege?

$\boxed{* , * , * , * , * , *}$, * , * , * , * , * , $\boxed{* , * , * , * , *}$

(Kekenák Tamás, Kassa)

Első megoldás: Két szomszédos szám között 5 a különbség. Mivel az első téglalap utolsó (azaz hatodik) számától számolva a második téglalap utolsó (azaz ötödik) száma a tizedik szám, így az utóbbi 50-nel nagyobb. Hasonlóan rendre 50-nel nagyobb a második téglalap 1.; 2.; 3.; 4. száma az első téglalap 2.; 3.; 4.; 5. számánál. A második téglalap 5 számának összege ezért $5\cdot 50=250$-nel nagyobb, mint az első téglalap 2.; 3.; 4.; 5. számának összege. A két téglalapban ezért csak úgy lehet egyenlő a számok összege, ha az első téglalapban az első szám a 250. Tehát az első téglalapban lévő számok összege

$$250+255+260+265+270+275=1575.$$

Második megoldás: Legyen a legkisebb szám értéke x.
Ekkor az első téglalapban lévő számok összege

$$x+x+5+x+10+x+15+x+20+x+25=6x+75,$$

a második téglalapban lévő számok összege pedig

$$x+55+x+60+x+65+x+70+x+75=5x+325.$$

Felírható tehát a következő egyenlet: $6x+75=5x+325$. Az egyenlet mindkét oldalából kivonva $5x$-et és 75-öt, $x=250$ adódik. Tehát az első téglalapban lévő számok összege $6x+75=6\cdot 250+75=1575$.

7. Bodza felírta közvetlenül egymás után, csökkenő sorrendben az összes pozitív egész számot 2019-től 1-ig, így a következő számot kapta:
201920182017.....10987654321.
a) Mennyi maradékot ad a Bodza által felírt szám 6-tal osztva?
b) Bodza alaposan megvizsgálta ezt a számot a papírján, és ha talált legalább három egyforma, 1-nél nagyobb számjegyet közvetlenül egymás mellett, akkor bekarikázta ezeket a számjegyeket. Hány számjegyet karikázott be Bodza?

(Kozma Katalin Abigél, Győr)

Megoldás:

a) Egy szám ugyanannyi maradékot ad hárommal osztva, mint amennyit a számjegyeinek összege. Nézzük a számokat a felírás sorrendjében, és írjuk le mindegyiknek a hármas maradékát. A 2019 osztható 3-mal, így hármas maradéka 0. Mivel a számok egyesével csökkennek, és 2019 szám osztási maradékát írjuk le, vagyis a sorozat tagjainak száma is hárommal osztható, így a hármas maradékok sorozata a következő lesz: 0; 2; 1; 0; 2; 1; …; 0; 2; 1. Mivel egy szám számjegyeinek összege is ugyanannyi maradékot ad hárommal osztva, mint amennyit maga a szám, így a fenti sorozat összegének hármas maradéka egyben a Bodza által felírt összes számjegy összegének hármas maradéka is. Mivel a sorozat három egymást követő tagjának összege osztható hárommal, így az összes számjegy összege is osztható hárommal. A szám 1-re végződik, így páratlan, tehát nem lehet 6-tal osztható, de osztható 3-mal, tehát a Bodza által leírt szám 6-tal osztva 3 maradékot ad.

b) Bodza 2019-től 2000-ig nem karikázott be semmit, ez ellenőrizhető.

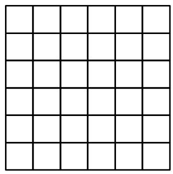
Nézzük 1999-től 1000-ig a négyjegyű számokat. Ezek mindegyike 1-es számjeggyel kezdődik, így csak azokban a számokban karikázott be 3-3 számjegyet, amelyeknek az utolsó három számjegye egyenlő (és nem 1). Ilyen számok: 1999; 1888; 1777; …; 1222. Ez $8 \cdot 3 = 24$ bekarikázott számjegy.

Most nézzük a háromjegyű számokat. Bekarikázta azoknak a számoknak mindhárom számjegyét, amelyeknek minden számjegye egyenlő (és nem 1). 8 ilyen van: 999; 888; …; 222. A többi szám mindegyike legfeljebb két 9-es számjegyet tartalmaz. Ha ezek a szám végén vannak, és ez a szám nem a 999, akkor a következő szám ennél 1-gyel kisebb, ezért első számjegye nem 9. Ez azt jelenti, hogy ilyen módon nem találhatunk legalább három egymást követő 9-est. Ha egy szám két 9-essel kezdődik, akkor előtte egy nála eggyel nagyobb szám áll. Ez csak akkor végződhet 9-re, ha a két 9-essel kezdődő szám a 998, az előző szám pedig a 999. Vagyis mindössze két újabb 9-est találtunk, a 998 első két számjegyét, amelyet be lehet karikázni. Tehát összesen 5 darab 9-es számjegyet karikázott be Bodza. Ugyancsak 5-5 darabot karikázott be a többi számjegyből is: a 888 és 887 nyolcasait, a 777 és 776 heteseit, …, végül a 222 és a 221 ketteseit. A háromjegyű számoknak tehát összesen $8 \cdot 5 = 40$ számjegyét karikázta be Bodza.

Két egymást követő kétjegyű szám második számjegye mindig különböző, ezért közülük csak a két egyforma számjegyből álló számokat tudta bekarikázni, a következő szám velük egyenlő első számjegyével: 99 és 98; 88 és 87; …; 22 és 21. Ez $8 \cdot 3 = 24$ bekarikázott számjegy.
Az egyjegyű számok közül egyet sem lehet bekarikázni.
Tehát Bodza összesen $24 + 40 + 24 = 88$ számjegyet karikázott be.

Második megoldás az a) részre: Számoljuk össze a leírt számjegyek összegét, helyi érték szerint. Az ezres helyi értéken 20 darab 2-es és 1000 darab 1-es számjegy szerepel, ezek összege 1040. A 2000-nél nagyobb számokban a többi leírt számjegy összege 100. 1-től 2000-ig a százas, tízes és egyes helyi értéken minden számjegyet ugyanannyiszor, vagyis 200-szor írtunk le, tehát minden számjegy összesen 600-szor szerepel. Ezeken a helyi értékeken a számjegyek összege $600 \cdot (0 + 1 + 2 + ... + 8 + 9) = 600 \cdot 45 = 27000.$ A Bodza által leírt szám számjegyeinek összege így 28140. Mivel ennek a számnak a számjegyösszege 15, így a szám számjegyeinek összege osztható hárommal, tehát a szám is osztható hárommal. A szám 1-re végződik, így páratlan, tehát nem lehet 6-tal osztható, de osztható 3-mal, vagyis a Bodza által leírt szám 6-tal osztva 3 maradékot ad.

8. Rita és Kristóf egy 6×6-os négyzetrácson a következő játékot játsszák: Minden lépésben az éppen következő játékos kiválaszt egy sort vagy oszlopot, és annak összes mezőjét befesti a saját színével. Kristóf színe a kék, Ritáé a rózsaszín. (Ha valamelyik mező kék volt, és azt Rita átfesti, akkor az a mező rózsaszín lesz, és fordítva: egy már rózsaszín mezőt Kristóf a lépésével kékre fest.) Kristóf kezd, és felváltva lépnek. Amelyik sort vagy oszlopot valamelyikük egyszer már választotta, azt egyikük sem választhatja ki újra. A játék akkor ér véget, ha már minden sort és minden oszlopot kiválasztotta valamelyikük. Rita nyer, ha a játék végén pontosan 6-tal több rózsaszín mező van, mint kék, egyébként pedig Kristóf a győztes. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Adj meg egy lehetséges nyerő stratégiát!



(Vistan Laura, Kassa)

Megoldás: Belátjuk, hogy Ritának van nyerő stratégiája. Ha egy mezőt kétszer befestünk, akkor annak a színe többé már nem változik. Ha Kristóf kiválaszt egy sort, akkor Rita válasszon ki egy oszlopot, és fordítva. Az első lépéspár után az a mező, amelyik a kiválasztott sor és oszlop közös mezője, már nem változtatja színét, rózsaszín marad a játék végéig. Kristóf második lépése mindegy, hogy sor vagy oszlop: biztosan egy olyan mező lesz, amelyet ő fest be másodszor, így annak a színe már nem változik, a játék végéig kék marad. Jöhet Rita válaszlépése. Ha Kristóf pl. sort választott, akkor Rita lépése előtt 2 sor és 1 oszlop mezői vannak már befestve. Most ő oszlopot választ, így ebben 2 befestett mező van. Ezeket másodszor festi be, így ezek most már a játék végéig rózsaszínek maradnak. Kristóf harmadik lépése előtt 2 sort és 2 oszlopot festettek már be, így bármit is tesz, a lépése után 2 olyan mező keletkezik, amely most már mindig kék marad. Rita válaszlépése után az előbb elmondottak miatt viszont 3 olyan mező keletkezik, amely a játék végéig rózsaszín marad. Hasonlóan gondolkodva, a negyedik, ötödik, hatodik lépésben Kristóf rendre 3; 4; 5 mezőt fest véglegesen kékre, Rita pedig rendre 4; 5; 6 mezőt fest véglegesen rózsaszínre. A játék végén ezért a kék mezők száma $1+2+3+4+5=15$, a rózsaszín mezők száma pedig $1+2+3+4+5+6=21$, tehát valóban 6-tal több rózsaszín mező lesz, mint kék.

Megoldások, 7. osztály

1. Egy kétkarú mérleg jobb oldali serpenyőjébe csak piros, a bal oldaliba csak zöld golyókat tettünk. Tudjuk, hogy bármelyik két egyforma színű golyónak egyenlő a tömege. A két serpenyőben összesen 45 darab golyót helyeztünk el, így a mérleg egyensúlyban van. Ha a jobb oldali serpenyőből 11 piros golyót elvennénk, a bal oldali serpenyőből pedig 2 zöld golyót áthelyeznénk a jobb oldaliba, akkor a mérleg ismét egyensúlyban lenne. Hány piros golyó van a jobb oldali serpenyőben?

(Szabó Magda, Szabadka)

Első megoldás: Legyen egy piros golyó tömege p, egy zöld golyó tömege z. Jelöljük a jobb oldali serpenyőben lévő piros golyók számát x-szel, ekkor a bal oldali serpenyőben $45-x$ darab zöld golyó van. Mivel a mérleg egyensúlyban van, így felírható a következő egyenlet: $p\cdot x=z\cdot(45-x)$. Az átrakodás után a jobb oldali serpenyőben $x-11$ darab piros és 2 zöld golyó lesz, a bal oldaliban pedig $43-x$ darab zöld, tehát felírható a következő egyenlet:

$$p\cdot(x-11)+2\cdot z=z\cdot(43-x).$$

Az első egyenletben a zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$p\cdot x=45\cdot z-z\cdot x,$$

amelyet rendezve adódik, hogy

$$p\cdot x+z\cdot x=45\cdot z\ .\ (1)$$

A második egyenletben a zárójelfelbontás után azt kapjuk, hogy

$$p\cdot x-11\cdot p+2\cdot z=43\cdot z-z\cdot x,$$

amelyet rendezve adódik, hogy

$$p\cdot x+z\cdot x=41\cdot z+11\cdot p.\ (2)$$

Az (1) és (2) jelű egyenletek bal oldalán ugyanaz a kifejezés áll, ezért a jobb oldalon álló kifejezések is egyenlők, vagyis $45\cdot z=41\cdot z+11\cdot p$, tehát

$4\cdot z = 11\cdot p.$ (3)

Az (1) jelű egyenletet 11-gyel szorozva kapjuk, hogy

$11\cdot p\cdot x + 11\cdot z\cdot x = 495\cdot z.$

Ebbe az egyenletbe (3) miatt $11\cdot p$ helyett $4\cdot z$ írható, tehát

$4\cdot z\cdot x + 11\cdot z\cdot x = 495\cdot z.$

Mindkét oldalt osztva a pozitív z számmal, összevonás után kapjuk, hogy

$15\cdot x = 495,$ azaz $x = 33.$

A jobb oldali serpenyőben 33 piros golyó van.

Második megoldás: Ha az áthelyezés után mindkét serpenyőből elvennénk két zöld golyót, akkor a mérleg újra egyensúlyban lenne. Mi változott a mérleg eredeti állapotához képest? A jobb oldali serpenyőben 11-gyel kevesebb piros golyó van, a bal oldaliban pedig 4-gyel kevesebb zöld. Mivel a mérleg így is egyensúlyban van, így a két serpenyőből egyenlő tömegű golyót vettünk le, vagyis 11 piros golyó egyenlő tömegű 4 zöld golyóval. A bal oldali serpenyőben lévő bármelyik 11 piros golyóval a jobb oldali serpenyőben 4 zöld golyó képes egyensúlyt tartani, vagyis a két serpenyőben a piros és zöld golyók számának aránya 11:4. A 45 golyót kell tehát 11:4 arányban felosztani. Mivel $11+4=15$ és $45:15=3,$ így a piros golyók száma $3\cdot 11 = 3,$ a zöldeké pedig $3\cdot 4 = 12.$

A jobb oldali serpenyőben 33 piros golyó van.

2. Hány különböző, hárommal osztható, négyjegyű pozitív egész szám készíthető a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből, ha egy számhoz mindegyik számjegyet

a) legfeljebb egyszer használhatjuk fel?

b) többször is felhasználhatjuk?

(Ágó Balog Krisztina, Újvidék)

Megoldás:

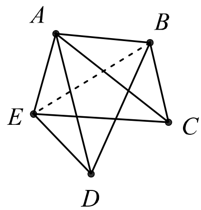
a) A felsorolt számjegyek közül a 0 és a 3 hármas maradéka 0, az 1 és a 4 hármas maradéka 1, a 2 és az 5 hármas maradéka 2. A szám akkor osztható hárommal, ha a számjegyek összegének hármas maradéka 0. Ezt kétféleképpen valósíthatjuk meg: vagy két 1 maradékú és két 2 maradékú számjegyet, vagy két 0 maradékú, egy 1 maradékú és egy 2 maradékú számjegyet kell használnunk. Az első esetben a számjegyek 1; 2; 4; 5, amelyeknek $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ lehetséges sorrendje van. A második esetben biztosan szerepel a 0 és a 3; választanunk kell egyet az 1 és a 4, illetve a 2 és az 5 közül, erre $2\cdot 2 = 4$ lehetőség van. Mivel a 0 nem állhat elöl, a lehetséges sorrendek száma $3\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 18,$ így ebben az esetben a lehetőségek száma $4\cdot 18 = 72.$ Tehát összesen $24+72=96$ megfelelő négyjegyű szám képezhető.

b) Az első helyre 5-féle, a második és a harmadik helyre 6-6-féle számot írhatunk, tehát az első három helyre összesen $5\cdot 6\cdot 6 = 180$ -féleképpen írhatunk számjegyeket. Nézzük meg, hogy az eddig beírt számjegyek összegének mennyi a hármas maradéka. Ha ez a maradék 0, akkor az utolsó helyre a 0 vagy a 3 írható; ha ez a maradék 1, akkor az utolsó helyre a 2 vagy az 5 írható; ha ez a maradék 2, akkor az utolsó helyre az 1 vagy a 4 írható. Azt tapasztaltuk, hogy az utolsó helyre mindenképpen 2-féle számot írhatunk, tehát összesen $180 \cdot 2 = 360$ négyjegyű szám felel meg a feladat feltételeinek.

Második megoldás az a) részre: A szám akkor osztható hárommal, ha a számjegyek összege osztható hárommal.
A számjegyek összege legalább $0+1+2+3=6$ és legfeljebb $2+3+4+5=14$, ezért a számjegyek összege lehet 6, 9 vagy 12. A számjegyek összege csak úgy lehet 6, ha a számjegyek 0; 1; 2; 3. Mivel az első helyen nem állhat 0, így a lehetséges sorba rendezések száma $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$. Ha a számjegyek összege 9, akkor a számjegyek lehetnek 0; 1; 3; 5 vagy 0; 2; 3; 4; mindkét esetben az előző esethez hasonlóan a sorba rendezések száma 18. Ha a számjegyek összege 12, akkor a számjegyek lehetnek 0; 3; 4; 5 vagy 1; 2; 4; 5; az első esetben a sorba rendezések száma 18, a másodikban $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Tehát összesen $4 \cdot 18 + 24 = 96$ megfelelő négyjegyű szám képezhető.

3. Dani tájfutó edzésre jár. Egy edzésről érkezve azt mesélte barátjának, Tóninak, hogy az edzés résztvevői közül mindenkinek pontosan 4 barátja volt jelen az edzésen, és bármelyik két résztvevőnek pontosan 2 közös barátja volt jelen az edzésen. Tóni elgondolkodott, és kijelentette, hogy ez bizony nem lehetséges. Bizonyítsd be, hogy Tóninak igaza van! (A barátságot minden esetben kölcsönösnek tekintjük: ha például András barátja Bélának, akkor Béla is barátja Andrásnak.)

(Fedorszki Ádám, Beregszász)



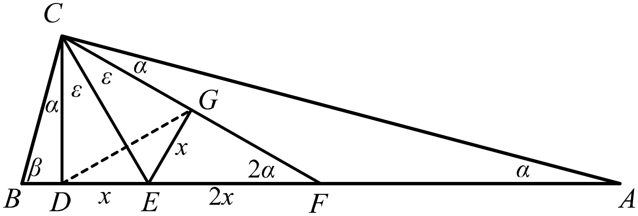
Megoldás: Készítsünk ábrát! Jelöljük az edzés résztvevőit pontokkal, és ha két versenyző barátja egymásnak, akkor kössük őket össze egy vonallal. Tételezzük fel, hogy Dani mindenre jól emlékezett. Legyen A négy barátja B, C, D és E. Mivel A-nak nincs több barátja, így A és B közös barátai csak A barátai közül kerülhetnek ki. Legyenek A és B közös barátai C és D. Ekkor B és E nem lehetnek barátok, mert úgy A-nak és B-nek már 3 közös barátja lenne. Ezt az ábrán szaggatott vonallal jelöltük. De A és E közös barátai is csak A barátai közül kerülhetnek ki. Mivel E-nek nem barátja B, ezért C és D barátja kell, hogy legyen E-nek. Ekkor azonban C-nek és D-nek közös barátja A, B és E is, vagyis nekik már 3 közös barátjuk lenne. Ez a feladat feltételei szerint nem lehetséges. Tehát Tóninak igaza van, Dani valamire rosszul emlékezett.

Megjegyzés: Belátható: annak, hogy Dani állítása igaz legyen, szükséges feltétele az, hogy az edzés résztvevőinek száma 7 legyen.
Képzeljük el, hogy annyiszor felírtuk a következő mondatot, ahány különböző módon az teljesül: „Andris és Béla közös barátja Csaba.” Mindenkinek 4 barátja van, közülük kettőt, akiknek ő közös barátja, $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ -féle módon választhatunk ki. Vagyis minden résztvevő 6-szor szerepel mint közös barát. Ha a résztvevők száma n, akkor a felírt igaz állítások száma $6n$. Most számoljuk össze ugyanezt máshogy. Az n résztvevő közül kettőt kiválasztani $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$-féle módon lehet. Mivel minden ilyen párhoz 2 közös barát tartozik, ezért kétszer ennyi, tehát $n\cdot(n-1)$ a felírt állítások száma. Ugyanazt kétféleképpen számoltuk meg, ezért felírható a következő egyenlet: $n\cdot(n-1)=6n.$ Mindkét oldalt a pozitív n-nel osztva, majd mindkét oldalhoz 1-et adva azt kapjuk, hogy az edzés résztvevőinek száma csak $n=7$ lehet.
Ez a megoldás azt igazolja, hogy ha a résztvevők száma nem 7, akkor Tóninak igaza van, Dani állítása nem lehet igaz. Azonban így a megoldás nem teljes, hiszen be kellene még látni, hogy 7-re sincs konstrukció.

4. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja F. A C csúcsból induló magasságvonal a D pontban, a C csúcsból induló belső szögfelező az E pontban metszi az átfogót. Az FE szakasz kétszer olyan hosszú, mint a DE szakasz. Hány fokosak az ABC háromszög belső szögei?

(Dr. Katz Sándor, Bonyhád)

Megoldás: Készítsünk ábrát!



Jelölje a DE szakasz hosszát x, ekkor az EF szakasz hossza $2x$.
Legyen $CAB\sphericalangle=\alpha$ és $CBA\sphericalangle=\beta.$ Tudjuk, hogy a C csúcsnál derékszög van, ezért $\alpha+\beta=90°$. Ha a háromszöget tükrözzük az F pontra, akkor téglalapot kapunk, melynek átlói felezik egymást és egyenlő hosszúak, ezért $AF=BF=CF$. (Ugyanez indokolható a Thalész-tétel megfordításával is.)
Az ACF háromszög egyenlő szárú, ezért $ACF\sphericalangle=\alpha,$ az F csúcsnál lévő külső

szög $BFC\sphericalangle = 2\alpha.$ A *BDC* háromszög derékszögű, *B* csúcsnál lévő belső szöge β, ezért $BCD\sphericalangle = 90° - \beta = \alpha.$

A *CE* szögfelező, ezért $ECD\sphericalangle = FCE\sphericalangle = 45° - \alpha,$ ezeket a szögeket az ábrán ε-nal jelöltük. Legyen a *D* pontnak a *CE* szögfelezőre vonatkozó tükörképe *G*. Mivel a tükrözés távolságtartó és szögtartó, ezért $EG = x,$ és az *EG* szakasz merőleges a *CF* súlyvonalra. Az *EFG* derékszögű háromszög egyik befogója fele olyan hosszú, mint az átfogója. Ez egy úgynevezett félszabályos háromszög, így *F* csúcsnál lévő belső szöge $2\alpha = 30°.$ Tehát az *ABC* háromszög *A* csúcsnál lévő belső szöge $\alpha = 15°,$ *B* csúcsnál lévő belső szöge $\beta = 90° - \alpha = 75°.$ (*C* csúcsnál lévő szöge pedig nyilván 90°.)

5. Egy táncest résztvevői közül voltak, akik már ismerték egymást, és voltak, akik még nem. Az est során mindegyik lány egy-egy álmodozó pillantást vetett mindegyik számára ismerős fiúra, de senki másra nem. Ugyanakkor mindegyik fiú egy-egy álmodozó pillantást vetett mindegyik számára ismeretlen lányra, de senki másra nem. A résztvevők összesen 180 álmodozó pillantást vetettek.
(Az ismeretségek kölcsönösek: ha például Pisti ismeri Terit, akkor Teri is ismeri Pistit.)
a) Hányan lehettek ezen a táncesten, ha az eddig elmondottakon kívül csak annyit tudunk, hogy a résztvevők száma kevesebb volt 40-nél?
b) Hány 13 éves lány lehetett ezen a táncesten, ha még azt is tudjuk, hogy mindegyik résztvevő 13 vagy 14 éves volt, és a lányok életkorának összege 240 volt?

(Fedorszi Ádám, Beregszász)

Megoldás:
a) Bármelyik fiú és bármelyik lány között pontosan egy álmodozó pillantásra került sor az est folyamán: ha ismerték egymást, akkor a lány, ha nem ismerték egymást, akkor a fiú részéről. Az álmodozó pillantások száma ezért a fiúk és a lányok számának szorzata volt, ami 180. A 180-at két pozitív egész szám szorzataként a következő módokon lehet felírni:

$$1\cdot 180 = 2\cdot 90 = 3\cdot 60 = 4\cdot 45 = 5\cdot 36 = 6\cdot 30 = 9\cdot 20 = 10\cdot 18 = 12\cdot 15,$$

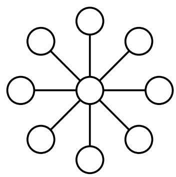
az egyes szorzatok tényezőinek összege rendre

181; 92; 63; 49; 41; 36; 29; 28; 27.

Mivel tudjuk, hogy a résztvevők száma kevesebb 40-nél, így 27, 28, 29 vagy 36 résztvevője lehetett a táncestnek.
b) Egyik lány sem idősebb 14 évesnél, így a lányok száma nem kevesebb, mint $\frac{240}{14} = 17\frac{2}{14},$ és egyik lány sem fiatalabb 13 évesnél, ezért a lányok száma nem több, mint $\frac{240}{13} = 18\frac{6}{13}.$ Mivel a lányok száma egész szám, így a lányok csak

18-an lehettek (azaz a fiúk száma 10 volt). Ha mindannyian 13 évesek lettek volna, akkor életkoraik összege $13 \cdot 18 = 234$ év lett volna. De életkoraik összege ennél 6 évvel több volt, így 6 lány 14 éves volt. Tehát a táncesten $18 - 6 = 12$ olyan lány vett részt, aki 13 éves.
Második megoldás a b) részre: Az a) rész megoldásából kiderült, hogy a lányok száma csak 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 30 lehetett. Ha a lányok száma 15 vagy kevesebb lett volna, akkor életkoraik összege legfeljebb $15 \cdot 14 = 210$ év lett volna, ha pedig a lányok 20-an vagy többen lettek volna, akkor életkoraik összege legalább $20 \cdot 13 = 260$ év lett volna. Tehát a lányok csak 18-an lehettek. Legyen közülük a 13 évesek száma x, ekkor a 14 évesek száma $18 - x$. A lányok életkorainak összegére felírható a következő egyenlet: $13 \cdot x + 14 \cdot (18 - x) = 240$. A zárójel felbontása és összevonás után kapjuk, hogy $252 - x = 240$, ahonnan $x = 12$. Tehát a táncesten 12 olyan lány vett részt, aki 13 éves.

6. Írd be az ábrán látható körökbe az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számokat úgy, hogy ha kiszámoljuk a berajzolt egyenesek mentén a három-három beírt szám összegét, akkor négy egymást követő számot kapjunk! Melyik szám kerülhet a középső körbe?
(Mindegyik körbe egy számot írunk, és mindegyik számot egyszer használjuk fel.)

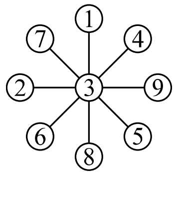


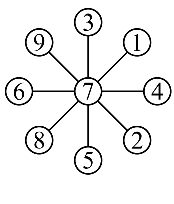
(Róka Sándor, Nyíregyháza)

Megoldás: Ha mind a négy összegből kihagyjuk a középső körbe írt számot, amelyik mindegyik összegben szerepel, akkor is igaz lesz az, hogy négy egymást követő számot kapunk. Ezek összege egyenlő a külső körökbe írt nyolc szám összegével. Ezt megkapjuk, ha a felsorolt számok közül kihagyjuk a középső körbe írt számot, és a többi nyolc számot összeadjuk. Négy egymást követő szám közül pontosan egy-egy olyan lesz, amely 4-gyel osztva 0, 1, 2, illetve 3 maradékot ad. Mivel az 1 és 3 maradékot adó számok összege osztható 4-gyel, így a négy szám összege 4-gyel osztva 2 maradékot ad. Mivel

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

és a 45 négyes maradéka 1, ezért úgy lesz a külső körökbe írt nyolc szám összegének négyes maradéka 2, ha a középső körbe írt szám négyes maradéka 3. Tehát a középső körbe a 3 vagy a 7 írható.
Mindkét esetben beírhatók a számok a körökbe a szabályoknak megfelelően, például az ábrákon látható módon. Az első ábrán az egyenesek mentén az összegek rendre 12; 13; 14; 15; a másodikon 15; 16; 17; 18.





7. Az ABC háromszög AB és AC oldala egyenlő hosszú. Legyen az AC oldal felezőpontja D. Vegyük fel az E pontot úgy, hogy a BE szakasz felezőpontja D legyen, az F pontot pedig úgy, hogy a DF szakasz felezőpontja illeszkedjen a BC oldal egyenesére, és a DF szakasz merőleges legyen a BC oldal egyenesére.

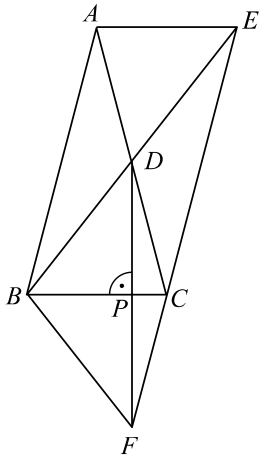
a) Igazold, hogy az E, C és F pontok egy egyenesre illeszkednek!

b) Hányszorosa az $ABFE$ négyszög területe az ABC háromszög területének?

(Zajzon Csaba, Barót)

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát!



A D pont az AC és a BE szakasznak is felezőpontja, vagyis az $ABCE$ négyszög átlói felezik egymást, így ez a négyszög paralelogramma. A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, tehát az EC szakasz párhuzamos az AB szakasszal. A BCD háromszög tengelyes tükörképe a BC egyenesre nézve a BCF háromszög, így ez a két háromszög egybevágó, tehát megfelelő szögeik egyenlők: $BCD\sphericalangle = BCF\sphericalangle$. Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú, ezért az alapon fekvő szögei egyenlők: $ABC\sphericalangle = BCD\sphericalangle$. Az előző két egyenlet alapján $BCF\sphericalangle = ABC\sphericalangle$, a két szög egyik szára egy egyenesre illeszkedik, így másik szögszáraik párhuzamosak, vagyis a CF szakasz is párhuzamos az AB szakasszal. Ezzel beláttuk, hogy a C ponton át húzott párhuzamos egyenesre illeszkedik az E és az F pont is, tehát ez a három pont egy egyenesre illeszkedik.

b) Az ABD és a DBC háromszögek AD és DC oldala egyenlő hosszú, és mivel harmadik csúcsuk közös (a B csúcs), ezért az ezen oldalakhoz tartozó magasságaik is egyenlők, tehát területük is egyenlő:

$$t_{ABD} = t_{DBC} = \frac{t_{ABC}}{2}.$$

Az ACE háromszög az ABC háromszög középpontos tükörképe a D pontra nézve, tehát

$$t_{ACE} = t_{ABC}.$$

A BFC háromszög a DBC háromszög tengelyes tükörképe a BC egyenesre nézve, ezért

$$t_{BFC} = t_{DBC} = \frac{t_{ABC}}{2}.$$

$$t_{ABFE} = t_{ABC} + t_{ACE} + t_{BFC} = t_{ABC} + t_{ABC} + \frac{t_{ABC}}{2} = \frac{5}{2} t_{ABC},$$

vagyis az *ABFE* négyszög területe az *ABC* háromszög területének 2,5-szerese.

8. Egy futóversenyen mind a 75 induló célba ért. Holtverseny nem volt, vagyis az 1.; 2.; 3.; …; 74.; 75. helyezések mindegyikét pontosan egy versenyző szerezte meg. A verseny előtt minden induló megtippelte, hogy hányadikként fog célba érni. Mindannyian mondtak egy-egy 0-nál nagyobb, 76-nál kisebb egész számot, amelyek összege pontosan 2019 volt. Hányan lehettek azok a versenyzők, akik eltalálták a saját helyezésüket?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás: A helyezési számok összege $1+2+3+...+73+74+75$. Ezt az összeget kiszámolhatjuk például a kis Gauss módszerével. Alkossunk párokat az összeg első és utolsó tagjából, második és utolsó előtti tagjából, és így tovább. Mivel az összeg egyik tagja eggyel nő, a másik pedig eggyel csökken, így minden esetben ugyanakkora összeget kapunk, ez az összeg 76 lesz. Ilyen módon 37 párt tudunk alkotni, és pár nélkül marad a középső szám, a 38, tehát a számok összege $37 \cdot 76 + 38 = 2850$. A versenyzők által megtippelt helyezések összege ennél $2850 - 2019 = 831$-gyel kevesebb volt. A legkevesebben akkor tévedtek, ha minden tévedő jobb helyezést tippelt magának, és tévedésük a lehető legnagyobb volt, vagyis a végén befutók elsőnek tippelték magukat. Ekkor az utolsó 74-et, az őt megelőző 73-at tévedett, és így tovább. Mivel $74+73+72+...+63 = 822$, így 12 tévedés még kevés, vagyis legalább 13-an tévedtek, például az előbb elkezdett módon, majd a hátulról 13. versenyző már csak 9-et. A tippek tehát: 1; 2; 3; …; 61; 62; 54; 1; 1; …; 1; 1. Vagyis a helyesen tippelők száma legfeljebb 62 lehet.
Nyilván előfordulhatott az, hogy senki nem találta el a helyezését. Az előbb egy olyan konstrukciót láttunk, amelyben az első 62 ember találta el a helyezését. Induljunk ki ebből a konstrukcióból. Ha az első 62 ember közül minden páros helyezési számú versenyző eggyel jobb, és minden páratlan helyezési számú versenyző eggyel rosszabb helyezést tippelt, akkor a tippelt helyezési számok összege nem változik, és mindenki rosszul tippelt.
Vagyis a tippek ebben az esetben: 2; 1; 4; 3; 6; 5; …; 62; 61; 54; 1; 1; …; 1; 1.
Most lássuk be, hogy a helyesen tippelők száma lehet bármely 62-nél kisebb pozitív egész szám is. Induljunk ki abból a konstrukcióból, amelyikben 62 helyesen tippelő van, és növeljük a tévedők számát egyesével úgy, hogy közben a tippelt helyezési számok összege ne változzon. Csökkentsük le az utolsó helyesen tippelő tippjét 1-gyel, és hogy az összeg ne változzon, a magát elsőnek tippelő utolsó helyezett tippjét növeljük 2-re. Most eggyel kevesebben tippeltek helyesen. A következő lépésben az ekkor utolsó helyesen tippelő tippjét növeljük 1-gyel, az utolsónak befutott versenyző tippjét pedig állítsuk vissza 2-ről 1-re, így már ket-

tővel növeltük meg a tévedők számát. Ezt a két lépést ismételgetve elérhetjük a 62 helyesen tippelőt tartalmazó konstrukcióból indulva, hogy olyan példákhoz jussunk, amelyekben a helyesen tippelők száma 61; 60; 59; 58; …; 2; 1; 0.

Megjegyzés: Azzal, hogy belátjuk, hogy a helyesen tippelők száma maximum 62 és minimum 0, még nem teljes a megoldás: be kellett látni azt is, hogy a helyesen tippelők száma lehet 1; 2; 3; …; 60; 61 is.

Megoldások, 8. osztály

1. Pisti leírt egy háromjegyű pozitív egész számot, amelynek egyik számjegye sem nulla, és mindhárom számjegye különböző. A Pisti által leírt szám egyenlő a számjegyeiből alkotható hat különböző kétjegyű szám összegével. Melyik számot írhatta le Pisti?

(Szabó Magda, Szabadka)

Első megoldás: Legyen az eredeti szám $\overline{abc}$, ekkor a szöveg alapján felírható a következő egyenlet:

$$\overline{ab}+\overline{ba}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{bc}+\overline{cb}=\overline{abc}.$$

Végezzük el mindkét oldalon a helyi érték szerinti bontást:

$$10a+b+10b+a+10a+c+10c+a+10b+c+10c+b=100a+10b+c.$$

Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$22a+22b+22c=100a+10b+c.$$

Az egyenlet rendezése után $12b+21c=78a$, mindkét oldalt 3-mal osztva

$$4b+7c=26a. \quad (1)$$

Mivel $26a=4b+7c\le 4\cdot 9+7\cdot 9=99$, ezért $a\le 3$.

Az (1) egyenletben $4b$ és $26a$ páros, ezért $7c$ is páros, tehát c is páros. Legyen $c=2d$, ahol d 5-nél kisebb pozitív egész szám. Az (1) egyenletbe ezt behelyettesítve, majd az egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$2b+7d=13a.$$

Ha $a=1$, akkor $2b+7d=13$. De akkor $7d<13$, ezért csak $d=1$ lehet. Ekkor $b=(13-7\cdot 1):2=3$ és $c=2\cdot 1=2$, ami jó megoldás, mert a, b és c értéke különböző.

Ha $a=2$, akkor $2b+7d=26$. De akkor $7d<26$, valamint d páros, ezért csak $d=2$ lehet. Ekkor $b=(26-7\cdot 2):2=6$ és $c=2\cdot 2=4$, ami jó megoldás, mert a, b és c értéke különböző.

Ha $a=3$, akkor $2b+7d=39$. De akkor $7d<39$, valamint d páratlan. Ha $d=1$, akkor az egyenletbe visszahelyettesítve $b=(39-7\cdot 1):2=16$ adódna, ami nem

lehet számjegy. Ha $d = 3$, akkor $b = (39 - 7 \cdot 3) : 2 = 9$ és $c = 2 \cdot 3 = 6$, ami jó megoldás, mert a, b és c értéke különböző. Azt pedig tudjuk, hogy $d \neq 5$, mert különben az a nem lehetne számjegy.
Tehát a Pisti által leírt szám a 132, a 264 vagy a 396 lehetett.

Második megoldás: Legyen az eredeti szám $\overline{abc}$, ekkor a szöveg alapján felírható a következő egyenlet:

$$\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{bc} + \overline{cb} = \overline{abc}.$$

Végezzük el mindkét oldalon a helyi érték szerinti bontást:

$$10a + b + 10b + a + 10a + c + 10c + a + 10b + c + 10c + b = 100a + 10b + c.$$

Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$22a + 22b + 22c = 100a + 10b + c.$$

Ebből leolvashatjuk, hogy a keresett szám osztható 22-vel, vagyis páros és osztható 11-gyel. Az egyenlet mindkét oldalából a-t, b-t és c-t kivonva adódik, hogy

$$21 \cdot (a + b + c) = 9 \cdot (11a + b),$$

mindkét oldalt 3-mal osztva

$$7 \cdot (a + b + c) = 3 \cdot (11a + b). \quad (*)$$

A jobb oldalon álló kifejezés osztható 3-mal, ezért a szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, ami azt jelenti, hogy a keresett szám osztható 3-mal. Másrészt $11a + b$ osztható 7-tel. Kiderült tehát, hogy a keresett szám többszöröse a 2, 3, 11 számoknak, tehát a 66-nak is. Mivel hat darab kétjegyű szám összege, ezért kisebb 600-nál, és nem tartalmaz sem 0 számjegyet, sem két egyforma számjegyet.
A 66 következő többszörösei felelnek meg a felsorolt feltételeknek:

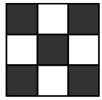
132; 198; 264; 396; 462; 528; 594.

A felsoroltak közül a 198, 462; 528; 594 kizárható, hiszen ezekben a számokban a $11a + b$ kifejezés értéke rendre 20; 50; 57; 64; tehát egyik esetben sem osztható 7-tel. A megmaradt három szám számjegyei igazzá teszik a (*) jelű egyenletet.
Tehát a Pisti által leírt szám a 132, a 264 vagy a 396 lehetett.

2. Teri Kecskeméten született. Egyik délután szülővárosának betűit írja be egy 3×3-as táblázat 9 négyzetébe úgy, hogy mindegyik négyzetbe egy betűt ír, először a K betűt helyezi el valamelyik négyzetben, majd sorban egymás után a többi betűt (K; E; C; S; K; E; M; É; T sorrendben) úgy, hogy a következő betűt mindig az előzőleg beírt betűvel szomszédos négyzetbe írja. (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldaluk.)
a) Hányféleképpen töltheti ki Teri a táblázatot?
b) Hányféleképpen töltheti ki Teri úgy a táblázatot, hogy minden sorba és minden oszlopba egy magánhangzó kerüljön?

(Csordás Mihály, Kecskemét)

Megoldás:



a) Színezzük a táblát sakktábla-szerűen, az ábrának megfelelően. Mivel 5 fekete és 4 fehér mező keletkezett, ezért Teri csak valamelyik fekete mezőn kezdheti az első K betűvel a táblázat kitöltését. Ha Teri az első K betűt a középső négyzetbe írja, akkor a következő E betűt 4 helyre írhatja, az ezt követő C betűt 2 helyre, innen viszont a táblázat kitöltése már egyértelmű. Ebben az esetben tehát $4 \cdot 2 = 8$ -féleképpen tudja kitölteni a táblázatot.

	E	
E	K	E
	E	

C	E	C
	K	

T	E	C
É	K	S
M	E	K

Ha Teri az első K betűt valamelyik csúcsnál lévő négyzetbe írja, akkor a következő E betűt 2 helyre írhatja. Vagyis az első két betűt $4 \cdot 2 = 8$ -féleképpen tudja elhelyezni. Ezután a C betűt kétféle helyre írhatja: vagy az egyik csúcsnál lévő négyzetbe, vagy középre. Az első esetben az S betű csak egy helyre írható, a következő K viszont ismét kétféle helyre: vagy középre, vagy a csúcsnál lévő négyzetbe. Ha középre írja, akkor a további kitöltés már egyértelmű, ha pedig a saroknégyzetbe, akkor az M betűnél ismét kétféleképpen dönthet. Vagyis a kitöltést a sarokba írt C betű esetén 3-féleképpen lehet befejezni. A második esetben, a középre írt C betűtől a táblázat csak egyféleképpen tölthető ki. Tehát Teri $8 \cdot 4 = 32$ -féleképpen tudja kitölteni a táblázatot az egyik sarokban kezdve.

K	E	
E		

K	E	C
E	K	S
M	É	T

K	E	C
É	T	S
M	E	K

K	E	C
É	M	S
T	E	K

K	E	T
S	C	É
K	E	M

Vagyis az összes lehetséges kitöltés száma $8 + 32 = 40$.

b) Mivel a kitöltés minden esetben fekete mezőn kezdődik, ezért a páratlan sorszámú betűk fekete, a páros sorszámú betűk pedig fehér mezőbe kerülnek. A három magánhangzó a szó 2., 6. és 8. betűje, ezért ezeket csak fehér mezőbe lehet írni. Az első sorban csak a középső mező fehér, így csak ide kerülhet magánhangzó. De ekkor a középső oszlopba már írtunk magánhangzót, így az alsó sor középső mezőjébe nem írhatunk. Ez viszont azt jelenti, hogy az alsó sorban nem lehet magánhangzó. Vagyis Teri nem tudja kitölteni a táblázatot a feltételeknek megfelelően.

3. A VI. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik délutánján sakkversenyt hirdettek a hetedik és nyolcadik évfolyamosok számára. Mindegyik játékos mindegyik ellenfelével egy játszmát játszott. Mindegyik játszma után a nyertes 1 pontot kapott, a vesztes 0 pontot, ha pedig döntetlenre végződött a parti, akkor mindkét játékos fél-fél pontot kapott. A verseny végén kiderült, hogy 9-szer annyi hetedikes vett részt a versenyen, mint a nyolcadikos; illetve a hetedikesek által szerzett összpontszám 4-szer annyi volt, mint a nyolcadikosok által szerzett. Hány pontot ért el Karcsi, a legeredményesebb nyolcadik évfolyamos versenyző?

(Fedorszki Ádám, Beregszász)

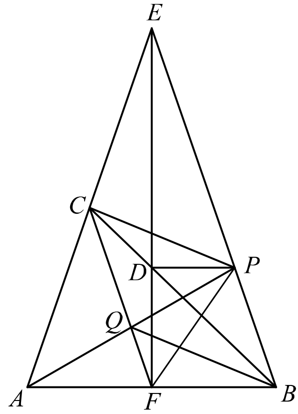
Megoldás: Legyen a nyolcadikosok száma n, ekkor a hetedikesek száma $9n$. A versenyen $10n$ játékos vett részt, valamennyien $10n-1$ mérkőzést játszottak, vagyis összesen $\frac{10n\cdot(10n-1)}{2}=5n\cdot(10n-1)$ partira került sor. Minden játszma végén 1 pontot osztottak szét a résztvevők között, ezért a verseny végén a játékosok pontszámainak összege $5n\cdot(10n-1)$ volt. Mivel a hetedikesek összesen négyszer annyi pontot szereztek, mint a nyolcadikosok, ezért a nyolcadikosok összpontszáma $n\cdot(10n-1)$, a hetedikeseké $4n\cdot(10n-1)$ volt. Mivel mindegyik versenyző $10n-1$ mérkőzést játszott, így egyik versenyző sem szerezhetett ennél több pontot. A nyolcadikosok összpontszáma csak úgy lehetett $n\cdot(10n-1)$, ha mindannyian minden mérkőzésüket megnyerték. Ha a nyolcadikosok egynél többen voltak, akkor sor került olyan mérkőzésre is, amelyiken két nyolcadikos egymás ellen játszott. Ezen a mérkőzésen nem tudtak mindketten nyerni, vagyis nem tudta mindegyik nyolcadikos megnyerni az összes partiját. Tehát a versenyen 1 nyolcadik osztályos és 9 hetedik osztályos induló volt. A nyolcadik osztályos, Karcsi, minden mérkőzését megnyerte, vagyis 9 pontot szerzett.

4. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F. A BC oldal egyik belső pontja D, az FD egyenes az AC oldal C-n túli meghosszabbítását az E pontban metszi. Tudjuk, hogy a BDF és a DEC háromszögek területe egyenlő. Legyen a D ponton át az AB oldallal húzott párhuzamos egyenes és a BE szakasz metszéspontja P, az AP és a CF szakaszok metszéspontja pedig Q.

a) Bizonyítsd be, hogy a $BECF$ négyszög trapéz!

b) Bizonyítsd be, hogy a $BPCQ$ négyszög paralelogramma!

(Dr. Bencze Mihály, Brassó)



Első megoldás: Mivel a *BDF* és a *DEC* háromszögek területe egyenlő, így ha mindkettőhöz hozzávesszük a *BED* háromszöget, akkor az így kapott *BEF* és *BEC* háromszögek területe is egyenlő lesz. Mivel a *BEF* és a *BEC* háromszögnek közös oldala a *BE* szakasz, így a *BE* oldalhoz tartozó magasságaik is egyenlők lesznek, vagyis a *C* és az *F* pontok egyenlő távol lesznek a *BE* egyenestől. A *CF* szakasz így párhuzamos lesz a *BE* szakasszal, tehát a *BECF* négyszög trapéz. Az *ABE* háromszögben *CF* középvonal, hiszen párhuzamos a *BE* oldallal, és illeszkedik az *AB* oldal *F* felezőpontjára. Ebből következik, hogy az *AE* szakasz felezőpontja *C*. Mivel az *ABE* háromszögben *BC* és *EF* súlyvonalak, így *D* a háromszög súlypontja, ezért a súlyvonalakat $1:2$ arányban osztja, tehát $ED = 2\cdot DF$, így $\frac{ED}{EF} = \frac{2\cdot DF}{DF + 2\cdot DF} = \frac{2}{3}$. Mivel a *DP* és az *FB* szakaszok párhuzamosak, ezért az *EDP* és az *EFB* háromszögek belső szögei egyenlők, tehát a két háromszög hasonló. A hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, tehát $\frac{EP}{EB} = \frac{2}{3}$, vagyis $EP = 2\cdot PB$. (*) Használjuk ki, hogy mivel az *FQ* szakasz párhuzamos a *BP* szakasszal, és *F* az *AB* oldal felezőpontja, így *FQ* középvonal az *ABP* háromszögben. Hasonlóan *CQ* középvonal az *APE* háromszögben. Legyen az *FQ* szakasz hossza *x*. Mivel *FQ* középvonal az *ABP* háromszögben, így $PB = 2x$. Ekkor $EP = 2\cdot PB = 4x$, és mivel *CQ* középvonal az *APE* háromszögben, ezért $CQ = 2x$. A *PB* és a *CQ* szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak, tehát a *BPCQ* négyszög paralelogramma.

Második megoldás: Legyen az *ABC* háromszög területe 2*x*, a *BDF* és a *DEC* háromszögek területe *y*. Mivel *CF* súlyvonal az *ABC* háromszögben, ezért

$$t_{AFC} = t_{BCF} = \frac{t_{ABC}}{2} = x.$$

Ekkor $t_{CFD} = t_{BCF} - t_{BDF} = x - y$, ezért

$$t_{ECF} = t_{DEC} + t_{CFD} = y + (x - y) = y + x - y = x.$$

Mivel $t_{AFC} = t_{ECF} = x$, ezért *FC* felezi az *AFE* háromszög területét, vagyis annak súlyvonala. Ez azt jelenti, hogy a *C* pont az *AE* szakasz felezőpontja. Az *FC* szakasz az *ABE* háromszög két oldalának felezőpontját köti össze, így az *ABE* háromszög középvonala, ezért párhuzamos a *BE* szakasszal és fele olyan hosszú. A *BECF* négyszög *BE* és *FC* oldalai párhuzamosak, így ez a négyszög trapéz. Mivel az *ABE* háromszögben *BC* és *EF* súlyvonalak, így *D* a háromszög súlypontja, ezért a súlyvonalakat $1:2$ arányban osztja, tehát $ED = 2 \cdot DF$, így

$$\frac{ED}{EF} = \frac{2 \cdot DF}{DF + 2 \cdot DF} = \frac{2}{3}.$$

Mivel a *DP* és az *FB* szakaszok párhuzamosak, ezért az *EDP* és az *EFB* háromszögek szögei egyenlők, így a két háromszög hasonló.

A hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, tehát $\frac{EP}{EB} = \frac{2}{3}$, vagyis $PB = \frac{EP}{2}$. (*)

Használjuk ki, hogy *CQ* középvonal az *APE* háromszögben, ezért $CQ = \frac{EP}{2}$, azaz $CQ = PB$. A *PB* és a *CQ* szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak, tehát a *BPCQ* négyszög paralelogramma.

Megjegyzés: A (*)-gal jelölt állítás bizonyítható hasonlóság alkalmazása nélkül is. Az *FBPD* négyszög egy trapéz, ezért az *FBP* és az *FPD* háromszögek területe egyenlő. Az *EDP* háromszög területe kétszerese az *FPD* háromszög területének, mert alapja kétszer akkora, magasságuk pedig egyenlő. Ekkor az *FBP* háromszög területének is kétszerese az *EDP* háromszög területe. Mivel a két háromszög *EP* és *PB* oldala egy egyenesre esik, és az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságuk egyenlő, ezért *EP* és *PB* oldalaik aránya egyenlő területeik arányával, tehát $EP = 2 \cdot PB$.

5. Egy téglalap területe 4,9 m^2, kerülete pedig 9,8 m. Határozd meg a téglalap oldalainak hosszát, ha tudjuk, hogy azok deciméterben kifejezve egész számok!

(Kovács Béla, Szatmárnémeti)

Megoldás: Legyen a téglalap oldalainak hossza deciméterben mérve *a* és *b*, amelyekről tudjuk, hogy pozitív egész számok, valamint $ab = 490$ és $2(a+b) = 98$, tehát $a + b = 49$. A 490-et kell két pozitív egész szám szorzatára bontani úgy, hogy azok összege 49 legyen. A lehetséges szorzatok:

$$1 \cdot 490 = 2 \cdot 245 = 5 \cdot 98 = 7 \cdot 70 = 10 \cdot 49 = 14 \cdot 35.$$

A két tényező összege az egyes esetekben rendre 491; 247; 103; 77; 59; 49. Ezek közül csak az utolsó felel meg a feladat feltételeinek.

Tehát a téglalap oldalainak hossza 14 dm és 35 dm.

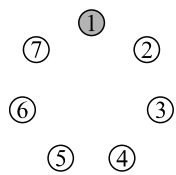
6. Egy hétjegyű számot nevezzünk bűvösnek, ha osztható összes számjegyének szorzatával.
a) Három egymást követő hétjegyű szám mindegyike bűvös. Melyek lehetnek ezek a számok?
b) Lehet-e találni négy egymást követő hétjegyű bűvös számot?

(Fedorszki Ádám, Beregszász)

Megoldás: Egy bűvös számnak egyik számjegye sem lehet nulla, hiszen akkor a számjegyek szorzata is nulla lenne, és egy hétjegyű szám nem lehet osztható nullával. Legyen az első hat számjegy szorzata *n*. Mivel a számjegyek szorzata többszöröse *n*-nek, ezért a számjegyek szorzata osztható *n*-nel. Két szomszédos szám legnagyobb közös osztója 1, így $n = 1$ lehet csak. Ez azt jelenti, hogy a szám első hat számjegye 1-es. Mivel 1-gyel minden hétjegyű szám osztható, így ezek közül a számok közül azok lesznek bűvösek, amelyek oszthatók utolsó számjegyükkel. Ezek közül a számok közül az 1111111, az 1111112 és az 1111113 bűvös számok, hiszen az oszthatóság szabályai miatt rendre oszthatók 1-gyel, 2-vel és 3-mal. Az 1111114 nem bűvös szám, mivel az utolsó két számjegyéből alkotott szám nem osztható 4-gyel. Az 1111115 osztható 5-tel, mert 5-re végződik, az 1111116 pedig osztható 6-tal, mert páros és számjegyeinek összege 12; továbbá $1111117:7=158731$, tehát ez a három szám is bűvös. Az 1111118 nem bűvös szám, mert az utolsó három számjegyéből alkotott szám nem osztható 8-cal, és az 1111119 sem bűvös, mert számjegyeinek összege nem osztható 9-cel. Tehát hat bűvös szám van, amelyek a következők:
1111111; 1111112; 1111113; 1111115; 1111116; 1111117.
Az eddig elmondottakból kiderült, hogy nincs négy egymást követő bűvös szám. Három egymást követő bűvös szám lehet az 1111111; 1111112; 1111113; vagy az 1111115; 1111116; 1111117.

7. Amikor a hét törpe leült egy kerek asztalhoz, Hófehérke elhatározta, hogy mindegyikük fejére tesz egy-egy piros, sárga, kék vagy zöld sapkát. Kuka rögtön kikönyörögte, hogy ő mindenképpen piros sapkát kapjon. Abban minden törpe egyetértett, hogy az egymás mellett ülők különböző színű sapkát kapjanak. Hányféleképpen tudta Hófehérke kiosztani a sapkákat a feltételeknek megfelelően? (Mindegyik színű sapkából van legalább 7 darab.)

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)



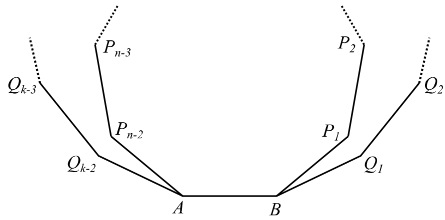
Első megoldás: Számozzuk meg a törpéket Kukával kezdve, az ábrán látható módon. Számoljuk össze az eseteket aszerint csoportosítva, hogy Kukán kívül hány törpe kapott piros sapkát. Ha senki más, akkor a 2-es törpén 3-féle sapka lehetett, hiszen nem lehetett rajta piros, ettől kezdve a következőn mindig 2-2-féle, hiszen nem lehetett sem piros, sem olyan,

mint amilyen az előző törpén volt. Ez $3\cdot 2^5=96$ eset. Ha egy törpe kapott még pirosat, akkor ez a törpe lehetett a 3-as, 4-es, 5-ös vagy 6-os számú, őt tehát 4-féleképpen választhattuk ki. A piros sapkás törpék után következő törpék mindig 3-3, a többiek 2-2-féle sapkát kaphattak az előző esetnél elmondottak miatt, így itt az esetek száma $4\cdot 3^2\cdot 2^3=288.$ Ha két törpe kapott még piros sapkát, akkor ők lehettek a 3-as és 5-ös, a 3-as és 6-os, vagy a 4-es és 6-os számúak, azaz 3 lehetőség van, így az előbb elmondottak miatt ez összesen $3\cdot 3^3\cdot 2=162$ eset.
Tehát az esetek száma összesen $96+288+162=546.$

Második megoldás: Számozzuk meg a törpéket Kukával kezdve, az első megoldás ábráján látható módon. Vezessük be a következő jelölést: legyen s_n a lehetséges sapkakiosztások száma, ha az asztalnál Kukával együtt *n* törpe ül.
Számoljuk meg a lehetőségek számát, ha Kukával együtt 3 törpe van, azaz határozzuk meg először s_3 értékét. Ekkor a 2-es törpe sapkaszíne 3-féle lehet, hiszen nem lehet piros, a 3-asé pedig 2-féle, hiszen nem lehet sem piros, sem olyan, mint amilyen a 2-esé volt, vagyis a lehetőségek száma $s_3=3\cdot 2=6.$
Ha a törpék száma Kukával együtt 4, akkor vizsgáljunk két esetet. Ha a 3-ason piros sapka van, akkor a 2-es és a 4-es sapkája 3-3-féle színű lehet, ez $3\cdot 3=9$ eset, ha pedig a 3-ason nem piros sapka van, akkor az övé lehet 3-féle, a 2-esé és a 4-esé 2-2-féle, ez $3\cdot 2\cdot 2=12$ eset, ezek szerint a lehetőségek száma összesen $s_4=9+12=21.$
Üljön most Kukával együtt 5 törpe az asztalnál. Két esetet különböztethetünk meg. Ha a 4-es fején piros sapka van, akkor az 5-ös fején 3-féle színű sapka lehet. Mivel a 3-ason nem piros sapka van, ezért ha a 4-es és az 5-ös távozna az asztaltól, a 3 ott maradó törpe ülésrendje akkor is megfelelne a feltételeknek. Korábban már megállapítottuk, hogy a 3 törpe ülésrendje $s_3=6$-féle lehet. Tehát ebben az esetben a lehetőségek száma $3\cdot s_3=3\cdot 6=18.$ Ha a 4-es fején nem piros sapka van, akkor az 5-ös fején 2-féle színű sapka lehet. Ha az 5-ös távozna az asztaltól, a 4 ott maradó törpe ülésrendje akkor is megfelelne a feltételeknek. Korábban már megállapítottuk, hogy a 4 törpe ülésrendje $s_4=21$-féle lehet. Tehát ebben az esetben a lehetőségek száma $2\cdot s_4=2\cdot 21=42,$ vagyis 5 törpe lehetséges ülésrendjeinek száma $s_5=18+42=60.$
Az 5 törpe eseténél alkalmazott lépés általánosítható, így alkalmazható 6, majd 7 törpe esetén is: $s_n=2\cdot s_{n-1}+3\cdot s_{n-2},$ ha *n* értéke legalább 5. Az összefüggést alkalmazva $s_6=2\cdot s_5+3\cdot s_4=2\cdot 60+3\cdot 21=120+63=183,$
végül $s_7=2\cdot s_6+3\cdot s_5=2\cdot 183+3\cdot 60=366+180=546.$

Megjegyzés: A második megoldásban használt módszert rekurziónak hívjuk. Ezt felhasználva, teljes indukció alkalmazásával belátható, hogy $s_n = \dfrac{3^n + 3\cdot(-1)^n}{4}$, ha n legalább 2.

8. Az $ABQ_1Q_2...Q_{k-2}$ szabályos k oldalú sokszög belsejében helyezkedik el az $ABP_1P_2...P_{n-2}$ szabályos n oldalú sokszög $(k > n)$. Létezik-e olyan k és n, amelyek esetén a Q_1, P_1 és P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek?



(Grallert Krisztina, Miskolc)

Első megoldás: Mivel minden konvex sokszög külső szögeinek összege 360°, ezért a két szabályos sokszög külső szögeinek nagysága $\dfrac{360°}{n}$ és $\dfrac{360°}{k}$. A $P_1BQ_1\sphericalangle$ a sokszögek külső szögeinek különbsége, azaz $P_1BQ_1\sphericalangle = \dfrac{360°}{n} - \dfrac{360°}{k}$.
A P_1BQ_1 háromszög egyenlő szárú $(P_1B = Q_1B = AB)$, ezért alapon fekvő szögeinek nagysága $BP_1Q_1\sphericalangle = BQ_1P_1\sphericalangle = \dfrac{180° - \left(\dfrac{360°}{n} - \dfrac{360°}{k}\right)}{2} = 90° - \dfrac{180°}{n} + \dfrac{180°}{k}$.
Ha a Q_1, P_1, P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek, akkor a $BP_1Q_1\sphericalangle$ az n oldalú sokszög P_1 csúcsánál lévő külső szöge, ezért $BP_1Q_1\sphericalangle = \dfrac{360°}{n}$.
Ezt a szöget kétféleképpen is kifejeztük, így felírható a következő egyenlet:

$$90° - \frac{180°}{n} + \frac{180°}{k} = \frac{360°}{n}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát 90°-kal osztva az $1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{k} = \dfrac{4}{n}$ diofantoszi egyenlethez jutunk. Az egyenletet a pozitív n-nel és k-val szorozva, majd egy oldalra rendezve, összevonás után azt kapjuk, hogy $0 = 6k - 2n - kn$.
Adjunk az egyenlet mindkét oldalához 12-t, majd a jobb oldali kifejezést alakítsuk szorzattá: $12 = (6-n)\cdot(k+2)$. Mivel n és k értéke is legalább 3, ezért $6 - n \le 3$ és $k + 2 \ge 5$. A fenti egyenlet ezekkel a feltételekkel akkor teljesülhet,

ha $6-n=2$ és $k+2=6$, vagy ha $6-n=1$ és $k+2=12$. Az első esetben $n=4$ és $k=4$, így ez nem megoldása a feladatnak, hiszen $k>n$ nem teljesül. A második esetben $n=5$ és $k=10$, amely megfelel a feladat feltételeinek.

Második megoldás: Minden konvex sokszög külső szögeinek összege 360°, ezért a két szabályos sokszög külső szögeinek nagysága $\frac{360°}{n}$ és $\frac{360°}{k}$. A $P_1BQ_1\sphericalangle$ a két sokszög külső szögeinek különbsége, azaz $P_1BQ_1\sphericalangle=\frac{360°}{n}-\frac{360°}{k}$. A P_1BQ_1 háromszög egyenlő szárú, hiszen $P_1B=Q_1B=AB$, ezért alapon fekvő szögeinek nagysága $BP_1Q_1\sphericalangle=BQ_1P_1\sphericalangle=\frac{180°-\left(\frac{360°}{n}-\frac{360°}{k}\right)}{2}=90°-\frac{180°}{n}+\frac{180°}{k}$.

Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot180°$. A sokszög szabályos, ezért P_1 csúcsánál lévő belső szöge $BP_1P_2\sphericalangle=\frac{(n-2)\cdot180°}{n}=180°-\frac{360°}{n}$.

A Q_1, P_1, P_2 pontok egy egyenesre illeszkednek, ezért $BP_1P_2\sphericalangle+BP_1Q_1\sphericalangle=180°$, vagyis $180°-\frac{360°}{n}+90°-\frac{180°}{n}+\frac{180°}{k}=180°$. Az egyenlet mindkét oldalából 180°-ot levonva, majd 90°-kal osztva a $-\frac{4}{n}+1-\frac{2}{n}+\frac{2}{k}=0$ diofantoszi egyenlethez jutunk. Az egyenletet a pozitív n-nel és k-val szorozva, összevonás és rendezés után azt kapjuk, hogy $2n=6k-kn$.

Emeljünk ki a jobb oldalon k-t: $2n=k\cdot(6-n)$. (*)

Mivel $2n$ és k is pozitív számok, így $6-n>0$, tehát $n<6$. Másrészt az n egy sokszög oldalainak száma, ezért $n\geq3$, vagyis n értéke csak a 3; 4; 5 számok közül kerülhet ki.

Ha $n=3$, akkor a (*) egyenlet alapján $6=3k$, ahonnan $k=2$ adódik, ami nem lehet egy sokszög oldalainak száma.

Ha $n=4$, akkor a (*) egyenlet alapján $8=2k$, ahonnan $k=4$ adódik. Ez sem megoldása a feladatnak, hiszen a feladat feltételei között szerepel, hogy $k>n$.

Ha $n=5$, akkor a (*) egyenlet alapján $k=10$, amely megfelel a feladat feltételeinek.