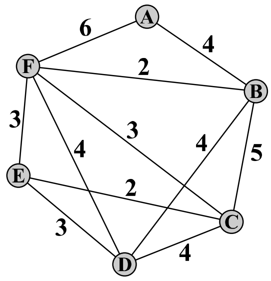
F E L A D A T O K

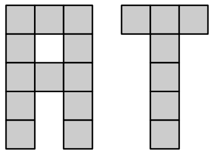
5. osztály – 1. forduló



1. Az ábrán az A, B, C, D, E, F városokat és az ezeket összekötő utakat látod. Az utakhoz írt számok azt mutatják, hogy hány tallért kell fizetnünk a buszjegyért, ha az egyik városból a másikba utazunk. Például B-ből D-be 4 tallér a buszjegy ára. Hány tallért kell fizetnünk a legolcsóbb olyan körutazásért, amely az A városból indul, és a másik öt város mindegyikét egyszer meglátogatva visszatér az A városba? *(Róka Sándor, Nyíregyháza)*

2. Pisti egy tekepályán 13 bábu közül próbált egy tekegolyó gurításával minél többet ledönteni. Minden gurítás után a ledöntött bábukat visszaállították eredeti helyükre. Pisti 6 alkalommal próbálkozott, összesen 53 bábut döntött le, mindegyik alkalommal többet az előzőnél. Minden gurításkor legalább két bábut ledöntött, és az utolsónál az első gurításakor ledöntött bábuk többszörösét döntötte le. Hány bábut döntött le Pisti az egyes gurítások során? Keresd meg az összes megoldást!

(Császár Sándor, Csíkmadaras)



3. Anna és Tomi kirakták nevük kezdőbetűjét egy átlátszó üvegasztalra összesen 19 szabályos dobókockából. Az ábrán a kirakott betűk láthatók felülről nézve (a pöttyöket nem ábrázoltuk). Tudjuk, hogy a szabályos dobókockán a szemközti lapokon lévő pöttyök számának összege mindig 7. Anna úgy rakta ki az A betűt, hogy a betű felületén látható pöttyök számának összege a lehető legkisebb lett. Tomi úgy rakta ki a T betűt, hogy a betű felületén látható pöttyök számának összege a lehető legnagyobb lett. Melyik betűn hány pötty látható összesen? *(Csordás Mihály, Kecskemét)*

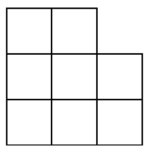
4. Egy iskolai matematikaversenyen Kati néni azt a feladatot adta a gyerekeknek, hogy írják le egy lapra a lehető legtöbb, különböző, nullánál nagyobb, de 100-nál nem nagyobb természetes számot úgy, hogy semelyik két szám különbsége ne legyen egyenlő 6-tal. A beadott megoldásokat ellenőrizve Kati néni észrevette, hogy a gyerekek nagyon ügyesek voltak. Mindenki ugyanannyi számot írt fel a lapjára, és ennél több számot nem is lehetett volna felírni. Ráadásul nem volt két olyan gyerek, akik pontosan ugyanazokat a számokat írták fel a lapjukra.

a) Hány számot írt fel mindegyik gyerek a lapjára?
b) Hányan indultak a versenyen, ha az indulók száma a lehető legtöbb volt?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

5. osztály – 2. forduló

1. Az óriások földjén egy öttagú családban az apa, az anya és a három fiú életkorának összege 100 év. A középső fiú annyi éves, ahány évvel az apa idősebb az anyánál. Az anya 10 évvel idősebb, mint a három fiú életkorának összege. A középső fiú 2 évvel fiatalabb a legidősebb fiúnál és ugyanennyivel idősebb a legfiatalabbnál. Hány évesek a család egyes tagjai? *(Fedorszki Ádám, Beregszász)*



2. Hányféleképpen írhatjuk be a táblázatba az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 számokat úgy, hogy mindhárom sorban, mindhárom oszlopban és a három négyzetből álló átlóban is ugyanannyi legyen a számok összege? *(Róka Sándor, Nyíregyháza)*

3. Egy labdarúgó tornán 6 csapat mindegyike pontosan egyszer játszott az összes többi csapat mindegyikével. Minden mérkőzés után a győztes csapat 3 pontot kapott, a vesztes 0 pontot, míg döntetlen esetén mindkét csapatnak 1-1 pont járt. A bajnokság végén a csapatok pontszámai a végső helyezések sorrendjében a következők voltak: 11; 9; 8; 5; 4 és 1 pont.

a) Összesen hány mérkőzés eredménye lett döntetlen?
b) Az 5 ponttal a negyedik helyen végzett csapat azért szomorkodott a torna végén, mert egyszer sem kapott ki, mégis lemaradt a dobogóról. Melyik csapat hány döntetlent játszott?

(Gecse Frigyes, Kisvárda)

4. Burkus királynak 988 katonája van, 77 osztagba elosztva. A király bármelyik osztagának katonáit szét tudná osztani a többi osztag között úgy, hogy a többi osztag azonos létszámúvá váljék. Tudjuk, hogy mindegyik osztagban legalább 10 katona szolgál. Azokat az osztagokat, amelyeknél nagyobb létszámú osztag nincs, alfa osztagoknak nevezzük.

a) Hány fős egy alfa osztag?

b) Mennyi az alfa osztagok számának legkisebb és legnagyobb lehetséges értéke?

(Császár Sándor, Csíkmadaras)

6. osztály – 1. forduló

1. Felrajzoltunk két szöget, amelyeknek a csúcsa, illetve az egyik szára közös és összegük 180°. A közös szárat elforgattuk, így az egyik szög az egyötöd részével megnőtt, a másik az egynegyed részével lecsökkent. Hány fokkal forgattuk el a közös szárat? *(Katz Sándor, Bonyhád)*

2. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számjegyek közül négyet felhasználva Cili felírt egy négyjegyű pozitív egész számot, amelynek minden számjegye különböző. Csabi szeretné kitalálni a számot, így először a 4215-re tippelt. Cili elárulta, hogy Csabi két számjegyet eltalált, amelyek közül az egyik a megfelelő helyiértéken is volt, a másik viszont nem. Másodszor Csabi a 2365-öt tippelte. Ismét két számjegyet talált el, amelyek közül az egyik megint a megfelelő helyiértéken volt, a másik viszont nem. Harmadszor Csabi a 9528-at mondta, de ekkor egy találata sem volt. Innentől kezdve Csabi a lehető legokosabban játszik, vagyis arra törekszik, hogy minél kevesebb további tippelésre legyen szüksége. Legkevesebb hány tippelés szükséges még ahhoz, hogy biztosan ki tudja találni a számot, függetlenül attól, mit írt fel Cili? (A kitalálás során az az utolsó lépés is egy tippelésnek számít, amikor Csabi rákérdez a helyes megoldásra.) *(Zita Diana, Szabadka)*

3. Petinek van 4 fehér és 23 zöld színű, 1 cm élhosszúságú kis kockája, amelyekből (az összeset felhasználva) a lehető legtöbb napon keresztül minden nap összerakott egy-egy 3 cm élhosszúságú kockát. Az egyetlen feltétel az volt az összerakásra, hogy semelyik nap sem készíthetett olyan kockát, amelynek felületén ugyanannyi négyzetcentiméter a zöld színű területek együttes nagysága, mint valamelyik korábbi napon. Az első kockát május elsején rakta össze. Melyik napon készítette az utolsót? *(Juhász Nándor, Szeged)*

4. Zsófi felírt néhány lap mindegyikére öt darab természetes számot, de semelyik két lapra nem írhatta ugyanazt az öt számot. Mindegyik lapról tudjuk, hogy ha a lapon szereplő számokat különkülön kivonjuk 10-ből, majd az így kapott öt számot összeszorozzuk, eredményül 45-öt kapunk. Azt is tudjuk, hogy a feltételeknek megfelelően még egy újabb lapra már nem tudott volna Zsófi öt ilyen számot felírni.

a) Hány lapra írt fel számokat Zsófi?

b) Hány lapon szerepel öt különböző szám? Melyek ezek a számok? *(Nagy Tibor, Kecskemét)*

6. osztály – 2. forduló

1. Moha és Páfrány egy kinccsel teli ládát találtak. Ebben ezüst- és aranyérmék voltak. Mindketten elvettek a ládából néhány érmét, méghozzá úgy, hogy az ezüstérméket a bal zsebükbe, az aranyérméket a jobb zsebükbe tették. Mohának lyukas volt a jobb zsebe, és útközben elvesztette az aranyérmék felét. Páfránynak a bal zsebe volt lyukas, és útközben elvesztette az ezüstérmék felét. Otthon Páfrány az aranyérméinek harmadát odaadta Mohának, és Moha az ezüstérméinek a negyedét adta oda Páfránynak. Ezután mindkettőjüknek pontosan 12 arany- és 18 ezüstérméje volt. Hány ezüst- és hány aranyérmét vittek el a ládából? *(Vista Laura, Kassa)*

2. Hány olyan különböző téglatest van, amely megfelel a következő feltételek mindegyikének?

- Mindegyik élének hossza centiméterben mérve egész szám.
- Ha az élek hosszát centiméterben mérjük, akkor az egy csúcsba futó élek hosszainak mérőszámait összeszorozva 2016-ot kapunk.
- Van legalább öt ugyanolyan hosszúságú éle.

(Csordás Mihály, Kecskemét)

3. Teri az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számjegyek mindegyikét pontosan kétszer felhasználva csupa különböző prímszámot írt fel a táblára. Amikor végzett, Zoli megállapította, hogy a felírt számok összege a lehető legkisebb.

a) Mennyi volt a táblán szereplő számok összege?

b) Melyik számokat írhatta fel Teri a táblára? Keresd meg az összes megoldást!

(Kiss Sándor, Nyíregyháza)

4. Egy tábori pingpongversenyen 8 gyerek indult. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott a bajnokság során. Az nyerte a bajnokságot, akinek a legtöbb győzelme lett a bajnokság végére (a pingpongban nincs döntetlen). Mivel a táborban csak egy asztal volt, így a bajnokság úgy zajlott, hogy amikor két gyerek ráért és szabad volt az asztal, lejátszották a meccsüket, és a kitett táblázatba beírták az eredményt. Amikor Kriszti megszerezte hatodik győzelmét, abban a pillanatban kiderült, hogy a bajnokságban már senki sem fogja tudni nemhogy megelőzni, de még utolérni sem. Hány mérkőzésre került sor eddig a pillanatig a bajnokságban, ha az eddig lejátszott mérkőzések száma a megadott feltételek mellett a lehető legkevesebb volt? *(Erdős Gábor, Nagykanizsa)*

7. osztály – 1. forduló

1. A piacon narancsokat tettek papírzacskókba, az elsőbe egy narancsot, a másodikba kettőt, a harmadikba hármat és így tovább, a tizenkettedikbe pedig 12 narancsot. Három vevő mindegyike ezek közül vásárolt fejenként 4 zacskót, vagyis minden narancsot eladtak. Igazold, hogy az egyik vevő legalább 26 darab narancsot vett! *(Simon József, Csíkszereda)*

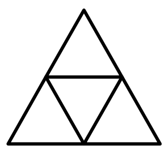
2. Igaz-e, hogy 1-től 2000-ig minden természetes szám előállítható a 2000 egy vagy több pozitív osztójának összegeként úgy, hogy minden osztó legfeljebb egyszer használható az összegben?

(Kiss Sándor, Nyíregyháza)

3. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AC befogóján a D pontot, BC befogóján az E pontot úgy vesszük fel, hogy DE párhuzamos AB-vel és $DE+EA=AB$. Hány fokos az EAB szög?

(Katz Sándor, Bonyhád)

4. A szabályos tetraéder egy olyan test, amelynek mind a négy lapja ugyanakkora egyenlő oldalú háromszög. Egy ilyen test mindegyik lapját az élek felezőpontjait összekötő szakaszok, vagyis a középvonalak berajzolásával négy egyforma háromszögre osztottuk (lásd az ábrát). Az így kapott kis háromszögeket négy színnel (fehérrel, kékkel, zölddel és pirossal) kifestettük a következő feltételek betartásával:



- Minden lap kifestéséhez csak két színt használhatunk.
- Minden színnel pontosan négy kis háromszöget kell kifesteni.
- Ha két kis háromszögnek van közös oldala, akkor azokat különböző színnel kell kifesteni.

Hány különböző kifestés lehetséges?

(Két kifestést nem tekintünk különbözőnek, ha egymásba forgathatók.) *(Tóth Gabriella, Palics)*

7. osztály – 2. forduló

1. Egy derékszögű háromszög két külső szögének aránya 5:3. Hány fokosak a háromszög belső szögei? *(Katz Sándor, Bonyhád)*

2. Egy versenyen hárman indultak: Pisti, Ricsi és Ottó. Minden futam után a győztes 10 pontot kapott, a második 5 pontot, a harmadik pedig 1 pontot. Pisti összesen 35 pontot szerzett, Ricsi 27-et, Ottó pedig 18-at. A verseny során egyszer sem fordult elő holtverseny, vagyis hogy két versenyző ugyanazt a helyezést érte volna el.

a) Hány futamból állt a verseny?

b) Melyik fiú hány futamot nyert?

c) Milyen sorrendben nem érkezhettek célba a versenyzők egyik futamban sem?

(Vistan Laura, Kassa)

3. Add meg a következő, 63 tagú összeg értékét olyan közönséges tört formájában, amely tovább nem egyszerűsíthető!

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+63}=?$$

Mennyi lesz ebben a törtben a számláló és a nevező szorzata? *(Dr. Bencze Mihály, Bukarest)*

4. Egy osztály 25 tanulója közül senkinek sincs 11-nél több barátja az osztályban. A barátságok kölcsönösek. Igaz-e, hogy biztosan ki lehet választani az osztályból 3 olyan tanulót, akik közül senki sem barátja a másik kettő egyikének sem? *(Fedorszki Ádám, Beregszász)*

8. osztály – 1. forduló

1. Hány olyan 3-mal és 5-tel is osztható, legalább háromjegyű és legfeljebb ötjegyű pozitív egész szám van, amelynek mindegyik számjegye 3 vagy 5? *(Csordás Mihály, Kecskemét)*

2. Kiválasztottunk 15 egymást követő természetes számot, és össze akartuk adni azokat. Sajnos azonban egy számot kihagytunk az összeadásból, így az összeg 2016 lett. Melyik számot felejtettük ki? *(Kiss Sándor, Nyíregyháza)*

3. A 0-nál nagyobb egész számokat az ábrán látható mintát követve háromszög alakban írtuk be egy táblázatba. A táblázat kitöltését addig folytattuk, amíg el nem jutottunk a 63. sor utolsó, azaz 63. eleméig. (A sorok vízszintesek, az oszlopok függőlegesek.)

1				
2	**3**			
4	**5**	**6**		
7	**8**	**9**	**10**	
11	**12**	**13**	**14**	**15**

a) Melyik szám került a 63. sor végére?
b) Melyik szám áll a 20. sor 16. helyén?
c) Hányadik oszlopban a legnagyobb a számok összege?

(Zita Diana, Szabadka és Erdős Gábor, Nagykanizsa)

4. Az ABC háromszög C-nél lévő szöge derékszög, a C-ből húzott magasságának talppontja D. A B csúcsból induló szögfelező a CD magasságot az M, az AC befogót az E pontban metszi. Tudjuk, hogy a DME szög nagysága 120°, és a DME háromszög területe 168 cm^2. Hány négyzetcentiméter az ABC háromszög területe? *(Polcz Zita, Szatmárnémeti)*

8. osztály – 2. forduló

1. Egy sokszöget szabályos sokszögnek hívunk, ha minden oldala és minden szöge egyenlő. Egy szabályos sokszög három szomszédos csúcsa által meghatározott egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek 10°-osak.

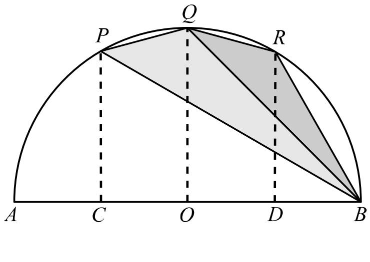
a) Hány oldalú ez a szabályos sokszög?
b) Hány átlója van ennek a szabályos sokszögnek? *(Zita Diana, Szabadka)*

2. Egy vízilabda-mérkőzésen 45-en ültek egy sorban egymás mellett. A nagyszünetben mindenki kiment a büfébe. Amikor visszajöttek, pontosan 3-an ültek vissza az eredeti helyükre. A többiek mindannyian egy-egy olyan székre ültek le, amely szomszédos az eredeti helyükkel. Hányféleképpen ülhettek a szünet után, ha ismert a szünet előtti sorrendjük? *(Juhász Péter, Budapest)*

3. Melyek azok az egyjegyű, 1-nél nagyobb pozitív egész számok, amelyekkel a $\dfrac{4^{2016}+5^{2017}+6^{2018}}{4^{2017}+5^{2018}+6^{2019}}$ tört egyszerűsíthető? *(Dr. Bencze Mihály, Bukarest)*

4. Az AB szakasz felezőpontja O, A-hoz közelebbi negyedelőpontja C, B-hez közelebbi negyedelőpontja D. A C, O és D pontokban az AB szakaszra állított merőlegesek az AB átmérőjű félkört rendre a P, Q és R pontokban metszik (lásd az ábrát). Számítsd ki a PQB és a QRB háromszögek belső szögeit!

(Bíró Bálint, Eger)



M E G O L D Á S O K

5. osztály – 1. forduló

1. feladat megoldása:

Mivel az A városból csak a B és az F városba vezet út, így az egyikbe kell elsőként utaznunk, és a másikból érkezünk vissza a végén. Mivel ugyanannyiba kerül, ha egy útvonalat egyik vagy másik irányban haladva járunk végig, elég azt az esetet vizsgálnunk, amikor B-be indulunk elsőként és a végén F-ből érkezünk vissza. 2 pont

Az AB és FA utakra mindenképpen ki kell fizetnünk összesen 10 tallért, így ezzel nem is kell számolnunk, hiszen ebből nem adódik eltérés az egyes körutazások ára között. 1 pont

Soroljuk fel az összes B-ből F-be vezető, A-t nem érintő, de C-t, D-t és E-t érintő utat, és számoljuk ki azok árát.

BCDEF utazás ára $5+4+3+3=15$ tallér, 1 pont

BCEDF utazás ára $5+2+3+4=14$ tallér, 1 pont

BDCEF utazás ára $4+4+2+3=13$ tallér, 1 pont

BDECF utazás ára $4+3+2+3=12$ tallér. 1 pont

A legolcsóbb körutazás az ABDECFA (vagy ennek fordítottja), ára $12+10=22$ tallér. 2 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat megoldása:

Ha Pisti utolsóra 11-et vagy kevesebbet döntött volna le a bábuk közül, akkor az összes ledöntött bábu száma legfeljebb $6+7+8+9+10+11=51$ lehetett volna, azaz 53-nál kevesebb. Tehát utolsóra 11-nél több bábut döntött le Pisti. 2 pont

Ha utolsóra 13-at döntött volna le, akkor elsőre nem tudott volna ennél kevesebbet, de egynél többet ledönteni, hiszen a 13-nak nincs az 1-től és önmagától különböző pozitív osztója. (Röviden: a 13 prímszám.) 1 pont

Vagyis utolsóra 12 bábut döntött le, az elsőre ledöntött bábuk száma pedig a 12 egyik osztója. Nézzük végig az összes lehetséges esetet, minden gurítás eredményét leírva. 1 pont

Ha elsőre 2-t döntött volna le, akkor a folytatásban legfeljebb $8+9+10+11+12=50$-et tudott volna ledönteni, vagyis összesen legfeljebb 52 bábut. Mindezekből az következik, hogy elsőre 2-nél többet kellett ledöntenie. 1 pont

Az is kiderül az előzőből, hogy a másodiktól kezdve elég sok bábut le kell dönteni ahhoz, hogy el lehessen érni az 53-at. Ha elsőre 3-at döntött, akkor a folytatás csak az előbbi esetnél látható öt legnagyobb számból állhatott, hiszen $3+8+9+10+11+12=53$. 1 pont

Ha elsőre 4-et döntött, akkor egy lehetőség van: $4+7+9+10+11+12=53$. 1 pont

Ha az első gurítás eredménye 6, akkor is egy lehetőség van: $6+7+8+9+11+12=53$. 1 pont

Az egyes gurítások során ledöntött bábuk száma tehát háromféleképpen alakulhatott: 3; 8; 9; 10; 11; 12 vagy 4; 7; 9; 10; 11; 12 vagy 6; 7; 8; 9; 11; 12. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat 1. megoldása:

Egy dobókocka felületén összesen $1+2+3+4+5+6=21$ pötty látható. 1 pont

11	7	11
7		7
13	7	13
7		7
6		6

1	8	1
	7	
	7	
	7	
	1	

Számoljuk össze mindkét esetben azt, hogy mennyi pöttyöt takartak el azzal, hogy a kockákat egymáshoz illesztették. Az eltakart pöttyök számát ráírtuk az egyes kockákra. Ha egy kockához annak két szemközti lapjánál illeszkedik két másik kocka, akkor akármire is törekszünk, ezek együtt 7 pöttyöt fognak eltakarni. 1 pont

Anna minél több pöttyöt akart eltakarni, ezért az alul lévő két kockán a 6 pöttyöt tartalmazó lapot illesztette a felette lévő kockához. 1 pont

Az alulról harmadik sorban lévő két szélső kockán az előbb már leírt okok miatt 7 pöttyöt takar el a felette és az alatta lévő kocka, a mellette lévőhöz itt is a 6-os lapot illesztette Anna, így 13 pöttyöt takart el. 1 pont

A felső sor szélén lévő kockáknak két szomszédos lapját kellett másik kockákhoz illeszteni, ezért Anna mindegyiken a 6-os és az 5-ös lapot illesztette, 11 pöttyöt eltakarva ezzel. 1 pont

Anna betűje 12 kockából áll, ezeken összesen $12 \cdot 21 = 252$ pötty található, ezek közül Anna 102-t eltakart, így $252 - 102 = 150$ pötty látható az A betűn. 1 pont

Tomi minél kevesebb pöttyöt akart eltakarni, így alul és fent a két szélén az 1 pöttyöt tartalmazó lappal illesztette a kockákat a mellettük álló kockákhoz. 1 pont

A fenti középső kockánál pedig már láttuk, hogy a két mellette álló kocka összesen 7 pöttyöt takar el, így az alatta lévőhöz az 1-es lapot illesztve ezen a kockán 8 pötty lesz takarva. 1 pont

Tomi betűje 7 kockából áll, ezeken összesen $7 \cdot 21 = 147$ pötty található, ezek közül Tomi 32 pöttyöt eltakart, így a T betűn $147 - 32 = 115$ pötty látható. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Írjuk rá mindegyik kockára, hogy azokon hány pötty látható.

10	14	10
14		14
8	14	8
14		14
15		15

20	13	20
	14	
	14	
	14	
	20	

Ha egy kockához annak két szemközti lapjánál illeszkedik két másik kocka, akkor akármire is törekszünk, ezek együtt 7 pöttyöt fognak eltakarni, vagyis ezeken a kockákon $2 \cdot 7 = 14$ pötty látható. 2 pont

Anna minél több pöttyöt akart eltakarni, ezért az alul lévő két kockán a 6 pöttyöt tartalmazó lapot illesztette a felette lévő kockához, így ezeken a kockákon $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ pötty látszik. 1 pont

Az alulról harmadik sorban lévő két szélső kockán a mellette lévőhöz itt is a 6-os lapot illesztette Anna, így ezeken a kockákon oldalról 1 pötty látszik, alul és felül összesen 7 pötty, vagyis mindkét kockán összesen 8 pötty látható. 1 pont

A felső sor szélén lévő kockáknak két szomszédos lapját kellett másik kockákhoz illeszteni, ezért Anna mindkettőn a 6-os és az 5-ös lapot illesztette, ezeken $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ pötty látható. 1 pont

Anna betűjén összesen $2 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 14 + 2 \cdot 15 = 150$ pötty látható. 1 pont

Tomi minél kevesebb pöttyöt akart eltakarni, így alul és fent a két szélén az 1 pöttyöt tartalmazó lappal illesztette a kockákat a mellettük állókhoz, ezeken $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ pötty látszik. 1 pont

A fenti középső kockán alul és felül összesen 7 pötty látszik, az alatta lévőhöz az 1-es lappal illesztette Tomi, így hátulról 6 pötty látható rajta, összesen 13 pötty. 1 pont

Tomi betűjén összesen $1 \cdot 13 + 3 \cdot 14 + 3 \cdot 20 = 115$ pötty látható. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

4. feladat 1. megoldása:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

a) Írjuk a számokat az ábrán látható módon egy olyan táblázatba, amelynek 6 oszlopa van. 1 pont

Mivel $100 = 16 \cdot 6 + 4$, így a táblázatnak 17 sora lesz, melyek közül az első 16 megtelik, a 17-edikbe már csak 4 szám marad. 1 pont

Most nézzük az egy oszlopban álló számokat. Egymás alá kerültek, amelyeknek pontosan 6 a különbsége, így két egymás alattit nem lehet kiválasztani. Ha az oszlopon belül kettesével csoportosítjuk a szomszédos számokat, akkor minden ilyen párból legfeljebb egy választható ki. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy a 4 db 17-es oszlopból rendre 9 szám, a 2 db 16-os oszlopból rendre

8 szám, vagyis összesen $4 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 36 + 16 = 52$ szám szerepelt a lapokon. 1 pont

Ez elérhető, ha a páratlan sorszámú sorokból kiválasztunk minden számot. 1 pont

b) Ha 52-t akarunk kiválasztani, akkor az első 4 oszlopból 9-9 számot csak úgy lehet, hogy a páratlan sorszámú sorokban lévőket választjuk ki.

Vagyis ezt egyféleképpen lehet megtenni. 1 pont

A két utolsó oszlopban ha kettesével párba állítjuk a szomszédos számokat, akkor mind a nyolc párból az egyiket ki kell választanunk. Ezt mindegyik oszlopban 9-féleképpen tehetjük meg, ugyanis vagy mindegyikből a felsőt választjuk, vagy ha valamelyikben az alsót választjuk, akkor ez alatt már mindegyik párból az alsót kell választanunk. 2 pont

A versenyen tehát $9 \cdot 9 = 81$ gyerek indult. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

a) Osszuk a számokat párokba úgy, hogy a különbségük 6 legyen, és (az utolsó 4 kivételével) minden szám egy párban szerepeljen. 1 pont

A következő párokat kapjuk: 1-7; 2-8; 3-9; 4-10; 5-11; 6-12; 13-19; 14-20; … 1 pont

a végén: 85-91; 86-92; 87-93; 88-94; 89-95; 90-96; pár nélkül marad: 97; 98; 99; 100 1 pont

Összesen 48 párt képeztünk és 4 szám maradt pár nélkül. Mivel minden párból legfeljebb az egyik számot választhatjuk, így legfeljebb 52 számot lehet kiválasztani. 1 pont

Ez meg is valósítható, ha mindegyik párból a kisebbet választjuk, valamint a 4 pár nélkülit, vagyis a kiválasztott számok: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 13; 14; 15; 16; 17; 18; …; 90; 97; 98; 99; 100. 1 pont

(Hat számot kiválasztunk, hat számot kihagyunk, és így folytatjuk.)

b) Az előző megoldásból kiderült, hogy amennyiben 52 számot akarunk kiválasztani, akkor a pár nélkül maradt 4 számot mindenképpen ki kell választani, valamint minden párból egyet. 1 pont

Ha például a 100-at kiválasztjuk, akkor a $100 - 6 = 94$-et nem választhatjuk, így az őt tartalmazó párból a kisebb számot, a 88-at kell választani.

De a gondolatot folytatva akkor a $88 - 6 = 82$ sem választható, csak a párja, a 76.

Ezt a gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy a 100 kiválasztása nyolc párból is meghatározta, mely számokat kell választani: 88; 76; 64; 52; 40; 28; 16; 4.

Ugyanez elmondható a 99; 98; 97 miatt másik nyolc párra is. 1 pont

Nézzük az 5-11; 17-23; 29-35; 41-47; 53-59; 65-71; 77-83; 89-95 párokat.

Ha ezek közül valamelyik párból, például a 65-71-ből a nagyobbik számot, a 71-et választjuk ki, akkor az ezt követő párokból is csak a nagyobbik számot választhatjuk, a 83-at és a 95-öt. Úgy fogalmazhatunk, hogy ha valahol a nagyobbat választjuk, utána már mindig azt kell. Megtehetjük, hogy mindenhonnan a kisebbet választjuk, ez 1 lehetőség, továbbá elkezdhetjük az első, a második, …, a nyolcadik pártól a nagyobbik számot választani, ez újabb 8 lehetőség. Összesen 9 lehetőség van. 1 pont

Ugyanez elmondható a még nem vizsgált, az előbbieknél eggyel nagyobb számokat tartalmazó nyolc párra, ott is 9 lehetőség van, azaz $9 \cdot 9 = 81$ gyerek indult a versenyen. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

5. osztály – 2. forduló

1. feladat 1. megoldása:

Legyen a középső fiú életkora x. Öccsének életkora $x - 2$, bátyjáé $x + 2$. 1 pont

Mivel a három fiú életkorának összege $3x$, ezért az anya $3x + 10$ éves. 1 pont

Az apa ennél x évvel idősebb, vagyis az ő életkora $4x + 10$ év. 1 pont

Életkoraik összege 100 év, vagyis felírható a következő egyenlet:

$$x - 2 + x + x + 2 + 3x + 10 + 4x + 10 = 100$$ 1 pont

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy $10x = 80$, ahonnan $x = 8$. 2 pont

A gyerekek 6, 8 és 10 évesek, az anya 34 éves, az apa pedig 42 éves. 2 pont
Ellenőrzés: Életkoraik összege $6+8+10+34+42=100$ év. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:
Ha a legkisebb fiú 2 évvel idősebb, a legidősebb fiú 2 évvel fiatalabb lenne,
akkor a három óriásgyerek ugyanannyi idős lenne, és életkoraik összege nem változna. 1 pont
Ha ezzel együtt az anya és az apa mindketten 10 évvel fiatalabbak lennének,
akkor a család öt tagjának az életkorát összeadva 20-szal kevesebbet, vagyis 80-at kapnánk. 1 pont
Az anya életkora ekkor háromszorosa lenne, mint bármelyik gyerekéé, 1 pont
az apa életkora pedig négyszerese lenne, mint bármelyik gyerekéé. 1 pont
A család öt tagjának életkora együtt így tízszerese lenne bármelyik gyerek életkorának. 1 pont
Mivel életkoraik összege 80 év lenne, így a gyerekek 8 évesek lennének, anya 24,
apa pedig 32 éves lenne. 1 pont
Valójában a gyerekek 6, 8 és 10 évesek, az anya 34 éves, az apa pedig 42 éves. 2 pont
Ellenőrzés: Életkoraik összege $6+8+10+34+42=100$ év. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

3. megoldás:
Vizsgáljuk meg, mi lenne, ha a legkisebb gyerek még csak 1 éves lenne.
Ekkor a gyerekek 1, 3 és 5 évesek lennének, anya 19, apa pedig 22 éves. Ebben az esetben
a család öt tagjának életkorát összeadva $1+3+5+19+22=50$-et kapnánk,
vagyis idősebbek ennél. 1 pont
Ha a gyerekek 1 évvel idősebbek, azaz 2, 4 és 6 évesek lennének,
akkor anya életkora 22 év, apa életkora pedig 26 év lenne, így együtt
$2+4+6+22+26=60$ évesek lennének. 1 pont
Észrevehetjük, hogy életkoraik összege 10 évvel lett több, mint az előző esetben.
Ez azért van így, mert a gyerekek együtt 3 évvel idősebbek, mint az előző esetben,
így anya is 3 évvel lett idősebb, apa pedig 4 évvel. 2 pont
Ez azt jelenti, hogy ha a gyerekek eredetileg feltételezett életkorához 5 évet adunk,
akkor a család tagjainak életkorait összegezve megkapjuk a 100-at. 2 pont
A gyerekek 6, 8 és 10 évesek, az anya 34 éves, az apa pedig 42 éves. 2 pont
Ellenőrzés: Életkoraik összege $6+8+10+34+42=100$ év. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

4. megoldás:
Próbáljuk kitalálni az óriások életkorát. Vizsgáljuk meg, mi lenne, ha a legkisebb gyerek
még csak 1 éves lenne. Ekkor a gyerekek 1, 3 és 5 évesek lennének, anya 19,
apa pedig 22 éves. Ebben az esetben a család öt tagjának
életkorát összeadva $1+3+5+19+22=50$-et kapnánk, vagyis idősebbek ennél. 1 pont
Ha a legkisebb gyerek 2 éves, akkor az életkorok összege $2+4+6+22+26=60$. 1 pont
Ha a legkisebb gyerek 3 éves, akkor az életkorok összege $3+5+7+25+30=70$. 1 pont
Ha a legkisebb gyerek 4 éves, akkor az életkorok összege $4+6+8+28+34=80$. 1 pont
Ha a legkisebb gyerek 5 éves, akkor az életkorok összege $5+7+9+31+38=90$. 1 pont
Ha a legkisebb gyerek 6 éves, akkor az életkorok összege $6+8+10+34+42=100$. 1 pont
Ha a legkisebb gyerek ennél idősebb, akkor együtt több mint 100 évesek lennének. 1 pont
A gyerekek 6, 8 és 10 évesek, az anya 34 éves, az apa pedig 42 éves. 2 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat megoldása:
Mivel $1+2+3+4+5+6+7+8=36$, így a bűvös összeg $36:3=12$. 1 pont
A felsoroltak közül két szám összegeként ez csak kétféleképpen állítható elő: $8+4$ vagy $7+5$.

Tehát csak ezek a számok kerülhetnek a felső csonka sorba és a jobb oldali
csonka oszlopba. 1 pont
Ebből a négy számból a 8 nem kerülhet sem a bal felső, sem a jobb alsó sarokba,
mert akkor az átlóban már a két sarokmező összege is legalább $8+5=13$ lenne,
így nem lehetne az átlóban lévő három szám összege 12. Ezek szerint a bal felső
vagy a jobb alsó sarokba a 4 kerül. 1 pont
A másik sarokmezőbe a $7+5$ összeg valamelyik tagja kerülhet. 1 pont
Innen kezdve a táblázat kitöltése már egyértelműen befejezhető. 1 pont
Kétféleképpen dönthettünk a 4-es helyéről, továbbá kétféleképpen dönthettünk arról,
melyik szám kerül a másik sarokmezőbe. 1 pont
Az elmondottak alapján a táblázat négyféleképpen tölthető ki. 1 pont
Ezek a kitöltések láthatók az alábbi ábrákon. 2 pont

4	8	
6	1	5
2	3	7

4	8	
2	3	7
6	1	5

7	5	
3	1	8
2	6	4

5	7	
1	3	8
6	2	4

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat 1. megoldása:

a) Minden csapat 5 ellenfél ellen játszott, ez $6\cdot 5=30$ mérkőzés lenne, de akkor
minden mérkőzést kétszer számoltunk, vagyis a meccsek száma $30:2=15$. 1 pont
Ha minden mérkőzés eldőlt volna, akkor minden mérkőzésen 3 pontot szerzett volna a
két csapat együtt, így a torna végén a csapatok pontszámainak összege $15\cdot 3=45$ lett volna. 1 pont
Mivel egy döntetlenül végződött mérkőzés után a két csapat együtt csak 2 pontot kap,
így minden egyes döntetlen 1 ponttal csökkenti a csapatok pontszámainak összegét.
Mivel a csapatok pontszámainak összege 38 pont volt,
ezért $45-38=7$ mérkőzés eredménye lett döntetlen. 1 pont
b) Ha minden csapatnál leírjuk, hogy hány döntetlent játszott, akkor minden döntetlent
kétszer számolunk, tehát ezeknek a számoknak az összege az összes döntetlenek
számának kétszerese, vagyis 14 kell hogy legyen. 1 pont
Az 5 pontos csapat nem kapott ki, ezért csak úgy lehet 5 pontja,
ha mindegyik ellenfelével döntetlent játszott. 1 pont
Ez azt is jelenti, hogy minden csapatnak van legalább 1 döntetlenje.
Viszont ha a 9 pontos csapatnak van döntetlenje, akkor csak úgy lehet 9 pontja,
ha 2 győzelme és 3 döntetlenje van. 1 pont
A még nem említett négy csapat közül egyiknek a pontszáma sem osztható 3-mal,
a maradék pontokat csak döntetlennel szerezhették. Ezek szerint a 11; 8; 4; 1 pontos
csapatoknak biztosan volt rendre legalább 2; 2; 1; 1; döntetlenje. 1 pont
Az egyes csapatoknál eddig összeszámolt döntetlenek számának összege így már 14,
vagyis további döntetlenekre nem kerülhetett sor. A csapatok a végső helyezések
sorrendjében rendre 2; 3; 2; 5; 1; 1 döntetlent játszottak. 1 pont
Megadhatók olyan eredmények, amelyekkel ez bekövetkezhetett. Az 5 pontos csapat
mindenkivel döntetlent játszott, az 1 pontos ezen a döntetlenen kívül mindenkitől
kikapott. A 4 pontosnak így már meg is vannak a pontjai (1 pont az 5 pontos csapat ellen,
3 pedig az 1 pontos csapat ellen), tehát a három dobogós csapattól kikapott.
A 9 pontos csapatnak van már két győzelme és egy döntetlenje, vagyis a 11 és a 8 pontos
csapattal döntetlent játszott. Már csak egy mérkőzés eredménye hiányzik, de a 8 pontos
csapatnak már megvan a 8 pontja, vagyis a végső győztestől, a 11 pontos csapattól kikaptak. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

a) Lásd az első megoldásnál. 3 pont
b) Az 5 pontos csapat nem kapott ki, ezért csak úgy lehet 5 pontja,
ha mindegyik ellenfelével döntetlent játszott. 1 pont

Ez azt is jelenti, hogy minden csapatnak van legalább 1 döntetlenje.
Viszont ha a 9 pontos csapatnak van döntetlenje, akkor csak úgy lehet 9 pontja, ha 2 győzelme és 3 döntetlenje van. 1 pont

Az 1 pontos csapat 1 döntetlent játszott, a többi 4 mérkőzését elvesztette.
Az 1 döntetlenről azt is tudjuk, hogy azt az 5 pontos csapat ellen szerezte. 1 pont

A 4 pontos csapatról így már kiderült, hogy az 1 pontost megverte, az 5 pontossal pedig döntetlent játszott. Így meg is van a 4 pontja, a 11, 9 és 8 pontos csapatoktól kikapott.
Ezzel a 9 pontos csapatnak is megvan a két győzelme (az 1 és a 4 pontos ellen), a többiek ellen döntetlent ért el. 1 pont

Mi derült ki eddig a 11 és a 8 pontos csapatról? Mindegyikük legyőzte az 1 és a 4 pontos csapatot és döntetlenre végzett az 5 és a 9 pontos csapattal, vagyis eddig mindkét csapat 8 pontot gyűjtött. Ez viszont azt jelenti, hogy egymás elleni meccsüket a 11 pontos csapat nyerte meg. 1 pont

Megadtuk minden mérkőzés eredményét, és közben az is kiderült, melyik csapat hány döntetlent játszott, hiszen a döntetlenek száma a végső helyezések sorrendjében rendre 2; 3; 2; 5; 1; 1. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

4. feladat megoldása:

a) Mivel a szétosztás után 76 osztagból állna a sereg, így az osztagok létszáma a szétosztás után $988:76=13$ lenne. 1 pont

Egy alfa osztag létszáma sem lehet 13-nál nagyobb, mivel ha nagyobb lenne és nem ezt az alfa osztagot osztanánk szét, akkor ennek az osztagnak a létszáma nem tudna 13-ra csökkenni. 1 pont

Ha az alfa osztagok létszáma legfeljebb 12 lenne, akkor a sereg létszáma legfeljebb $77\cdot 12=924$ lenne, ami kevesebb a tényleges 988-nál. 1 pont

Tehát az alfa osztagok 13 fősek. 1 pont

b) Az alfa osztagok száma akkor a legkisebb, ha a nem alfa osztagok száma a lehető legnagyobb. Megmutatjuk, hogy a 13 fősnél kisebb létszámú osztagok száma nem lehet 13-nál több. 1 pont

Ha ugyanis 13-nál több ilyen osztag lenne, akkor nem tudnánk az összes ilyent még egy alfa osztag felosztásával sem 13 fősre kiegészíteni, hiszen ehhez 13-nál több katona kellene, viszont még az alfa osztagok is csak 13 fősek. 1 pont

Lehet viszont 13 kisebb létszámú osztag. Ekkor az előző miatt egyik osztagból sem hiányozhat 1-nél több katona, mert akkor ezekből az osztagokból összesen 13-nál több katona hiányozna. Tehát ezek valamennyien 12 főből állnak.
Az alfa osztagok számának legkisebb lehetséges értéke tehát
$77-13=64$. ($64\cdot 13+13\cdot 12=988$) 1 pont

A legtöbb alfa osztag akkor lesz, ha a legkevesebb 13-nál kisebb létszámú osztag van.
Ezekből a kisebb létszámú osztagokból összesen 13 fő hiányzik.
Mivel azonban minden osztag legalább 10 fős, így az egyes csonka osztagokból 1, 2 vagy 3 katona hiányozhat. A 13-at kellene tehát minél kevesebb 1-es, 2-es és 3-as összegére bontani. 1 pont

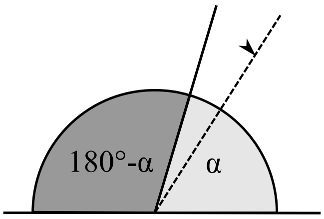
Mivel ennek az összegnek legalább 5 tagja van, $3+3+3+3+1$ vagy $3+3+3+2+2$, így az alfa osztagok számának legnagyobb lehetséges értéke $77-5=72$.
($72\cdot 13+4\cdot 10+1\cdot 12=988$, illetve $72\cdot 13+3\cdot 10+2\cdot 11=988$.) 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Kiderült, hogy az alfa osztagok száma egyféleképpen lehet minimális (ekkor 13 kisebb létszámú osztag van, amelyek mind 12 fősek), viszont kétféleképpen lehet maximális (ekkor 4 darab 10 fős és 1 darab 12 fős osztag van az egyik esetben és 3 darab 10 fős és 2 darab 11 fős a másik esetben). Az is igaz, hogy az alfa osztagok száma 64 és 72 között bármelyik egész szám lehet, érdemes esetleg azt is megvizsgálni, hogy melyiket hányféleképpen lehet megvalósítani.

1. feladat 1. megoldása:



Jelöljük α-val azt a szöget, amelyik csökkenni fog.
Ekkor a mellette lévő kiegészítő szöge $180° - \alpha$. 1 pont
A feladat szövege alapján a közös szár elforgatásával az α negyedrészével csökken, vagyis a csökkenés mértéke $\frac{\alpha}{4}$, 1 pont
a $180° - \alpha$ ötödrészével megnő, így a növekedés $\frac{180° - \alpha}{5}$. 1 pont
De az egyik szög annyival csökken, amennyivel a másik növekszik, vagyis felírható a következő egyenlet: $\frac{180° - \alpha}{5} = \frac{\alpha}{4}$. 2 pont
Az egyenlet megoldása $\alpha = 80°$. 1 pont
A közös szárat $\frac{\alpha}{4} = 20°$-kal forgattuk el. 2 pont
Ellenőrzés: A kiegészítő szög mértéke 100°, ennek ötödrésze szintén 20°. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Az a szög, amelyik egyötöd részével megnőtt, eredetileg az elforgatás szögének az ötszöröse volt. 2 pont
Az a szög pedig, amelyik egynegyed részével lecsökkent, eredetileg az elforgatás szögének a négyszerese volt. 2 pont
Ez azt jelenti, hogy a két szög összege az elforgatás szögének a kilencszerese volt. 2 pont
Mivel a két szög összege 180°, így az elforgatás szöge ennek kilenced része, vagyis 20°. 2 pont
Ellenőrzés: Az egyik szög mértéke $5 \cdot 20° = 100°$, ezt növeltük az ötödrészével, vagyis 20°-kal, a másik szög pedig $4 \cdot 20° = 80°$, ezt csökkentettük a negyedrészével, vagyis 20°-kal. A két eredeti szög valóban egymás kiegészítő szöge, hiszen összegük 180°. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat megoldása:
A harmadik tipp egyetlen találatot sem eredményezett, vagyis a keresett szám nem tartalmaz az első két tippben szereplő számjegyek közül sem 2-est, sem 5-öst. 1 pont
Ekkor az első tippből a 4 és az 1, a második tippből a 3 és a 6 lehetett csak a két találat.
Ezzel már tudjuk, hogy a keresett szám négy számjegye: 1, 3, 4 és 6. 2 pont
Nézzük most, hogy az első tippben melyik szám lehet a helyén. Tegyük fel először, hogy az 1-es van a helyén, vagyis a harmadik helyen. Ekkor viszont a második tippben nem lehet a 6-os a helyén, mert az a harmadik helyen van, csak a 3-as lehet második helyen. 1 pont
A 4-esnek két hely maradt, de az első helyen nem állhat, hiszen akkor az első tippben ő is a helyén állt volna, vagyis a 4-es a szám végére kerül, a 6-os pedig az elejére.
Az így kapott 6314 lehetett a Cili által gondolt szám. 1 pont
Másodszor tegyük fel, hogy az első tippből a 4-es volt a helyén, tehát a szám elején.
Az 1-es nem lehet a szám végén, mert akkor a 3-nak és a 6-nak a második és a harmadik hely maradna, így a második tippben vagy mindkettő jó helyen lenne, vagy egyik sem. 1 pont
De az 1-es az első tippben szereplő helyén sem állhat, vagyis az 1-es csak a második helyre kerülhet. 1 pont
Ekkor viszont a második tippben csak a 6 lehet jó helyen, a 3-asnak a szám vége maradt.
Az így kapott 4163 is lehetett a Cili által gondolt szám. 1 pont
Két szám maradt tehát „versenyben”, a 6314 és a 4163, így nem biztos,

hogy a következő tippre Csaba kitalálja a gondolt számot. Azonban ha a
következő tippre az egyiket mondja e két szám közül, akkor az ezt követő tipp
már biztosan telitalálatos lesz. Tehát Csabának még kettőt kell tippelnie,
hogy biztosan eltalálja a gondolt számot. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat 1. megoldása:
Fehér kockából van kevesebb, így egyszerűbb a nagy kocka felületén a fehér részek területével foglalkozni, hiszen ha az minden nap különböző lesz, akkor a zöld részeké is.
Ha egy fehér kocka a nagy kocka sarkához kerül, akkor annak 3 lapja látszik.
Ha az egyik él közepénél áll, akkor 2 lapja látszik. Ha valamelyik lap közepén áll, akkor 1 lapja látszik, végül ha a kocka közepén áll, akkor egy lapját sem lehet látni. 1 pont
Nevezzük a folytatásban az egyszerűség kedvéért az előbb említett típusú kockákat rendre sarok-, él-, lap- és belső kockáknak.
A legkevesebb fehér lap akkor látszik, ha az egyik fehér kocka belső kocka, a másik három pedig lapkocka, ekkor a látható fehér lapok száma $1\cdot 0+3\cdot 1=3$. 2 pont
A legtöbb fehér lap pedig akkor látszik, ha 4 fehér sarokkockát használunk, ekkor a látható fehér lapok száma $4\cdot 3=12$. 2 pont
Ezek szerint a fehér lapok száma legalább 3 és legfeljebb 12, tehát 10-nél több napon keresztül biztosan nem lehet megvalósítani a tervet. 1 pont
Ahhoz, hogy 10 napon keresztül valóban meg is lehessen valósítani a tervet, még azt is be kell látni, hogy a fehér lapok száma minden 3 és 12 közötti egész értéket felvehet. Ez viszont elérhető. Első nap rakjuk ki a legkevesebb fehér lapot adó elrendezést. Második napon a belső kockát rakjuk át lapkockává, így már 4 fehér lap látható. A következő 4 napon mindig egy lapkockát helyezzünk át élkockává, így minden nap 1-gyel növeljük a látható fehér lapok számát. Ebben a négy napban rendre 5, 6, 7, 8 fehér lap látható.
A négy utolsó napban pedig mindig egy élkockát rakjunk át sarokkockává.
Ezen napokon így rendre 9; 10; 11; 12 fehér lap lesz látható. 2 pont
Peti május 10-én készítette az utolsó kockát. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:
Ha egy zöld kocka a nagy kocka sarkához kerül, akkor annak 3 lapja látszik.
Ha az egyik él közepénél áll, akkor 2 lapja látszik. Ha valamelyik lap közepén áll, akkor 1 lapja látszik, végül ha a kocka közepén áll, akkor egy lapját sem lehet látni. 1 pont
Nevezzük a folytatásban az egyszerűség kedvéért az előbb említett típusú kockákat rendre sarok-, él-, lap- és belső kockáknak.
A legkevesebb zöld lap akkor látszik, ha a zöld kockák közül 1 belső kocka, 6 lapkocka, 12 élkocka és 4 sarokkocka, ekkor $1\cdot 0+6\cdot 1+12\cdot 2+4\cdot 3=42$ zöld lap látható. 2 pont
A legtöbb zöld lap pedig akkor látszik, ha a zöld kockák közül 8 sarokkocka, 12 élkocka és 3 lapkocka, ekkor a látható zöld lapok száma $8\cdot 3+12\cdot 2+3\cdot 1=51$. 2 pont
Ezek szerint a fehér lapok száma legalább 42 és legfeljebb 51, tehát 10-nél több napon keresztül biztosan nem lehet megvalósítani a tervet. 1 pont
Ahhoz, hogy 10 napon keresztül valóban meg is lehessen valósítani a tervet, még azt is be kell látni, hogy a zöld lapok száma minden 42 és 51 közötti egész értéket felvehet. Ez viszont elérhető. Első nap rakjuk ki a legkevesebb zöld lapot adó elrendezést. A következő négy nap mindegyikén egy élkockát rakjunk át sarokkockává. A követező 4 nap mindegyikén egy lapkockát rakjunk át élkockává, végül az utolsó napon a belső kockát rakjuk ki lapkockának.
Minden nap 1-gyel növeltük a látható zöld lapok számát, ami így a tízedik napra 51 lett. 2 pont

Peti május 10-én készítette az utolsó kockát. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

4. feladat megoldása:

a) Ha a 10-ből kivonunk egy természetes számot, akkor eredményül egy 10-nél nem nagyobb egész számot kapunk. Öt ilyen szám szorzataként kell előállítani a 45-öt. Vizsgáljuk meg először, mennyi lehet az egyes tényezők abszolútértéke.
A 45 csak a következő módokon bontható fel (a sorrendtől eltekintve) öt pozitív szám szorzatára: $45 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 15 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 9 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$. 1 pont
Az első esetben a 45 előjele csak mínusz lehet, ezért az 1-esek közül vagy egy, vagy három darab előjele mínusz, a többié plusz. Ilyen típusú megoldásból tehát 2 darab van.
A második esetnél a 15 előjele csak mínusz lehet. A többi szám közül vagy egy, vagy három kap mínusz előjelet. Ha egy, akkor az lehet az 1 vagy a 3. Ha három, akkor a plusz előjelet kapó lehet az 1, vagy a 3. Ilyen típusú felbontásból tehát 4 darab van. 1 pont
A harmadik és negyedik esetben már mindegyik szám előjele lehet plusz is és mínusz is. Mindkét esetben a mínusz előjelek száma páros, tehát nulla, kettő vagy négy.
Így mindkét esetben kapunk egy olyan megoldást, amikor minden szám előjele plusz.
Ez újabb 2 megoldás. 1 pont
Ha két szám előjele mínusz, akkor ezek a számok a harmadik esetben lehetnek 9 és 5; 9 és 1; 5 és 1; 1 és 1, míg a negyedik esetben lehetnek 5 és 3; 5 és 1; 3 és 3; 3 és 1; 1 és 1.
Vagyis a két esetben összesen 9 darab ilyen megoldás adódik. 1 pont
Ha négy szám előjele mínusz, akkor egy szám előjele plusz, ez a szám a harmadik esetben lehet 9, 5, vagy 1, a negyedik esetben pedig 5, 3, vagy 1, vagyis összesen 6 ilyen megoldás van. 1 pont
Összegezve: Zsófi $2+4+2+9+6=23$ lapra írt fel számokat. 1 pont
b) Ahhoz, hogy az öt szám különböző legyen, minden abszolútérték egfeljebb kétszer fordulhat elő, amelyek közül az egyik majd plusz, a másik pedig mínusz előjelet kap. Mindössze egy ilyen felbontás van, a $45 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$, tehát egyetlen lapon szerepel öt különböző szám. 1 pont
Ebből az egyik 3-as és az egyik 1-es mínusz előjelet kell hogy kapjon, ezért az 5 előjele már csak plusz lehet: $45 = (+5) \cdot (+3) \cdot (-3) \cdot (+1) \cdot (-1)$. 1 pont
Ezeket a számokat úgy kaptuk meg a Zsófi lapján lévő számokból, hogy azokat kivontuk 10-ből, így Zsófi lapján ezek a számok álltak: 5; 7; 13; 9 és 11. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

6. osztály – 2. forduló

1. feladat 1. megoldása:

Gondolkodjunk visszafelé! A végén mindkettőjüknek 18 ezüstérméje volt.
Mohánál azután maradt ennyi, hogy ezüstérméinek negyedét odaadta Páfránynak. Ez azt jelenti, hogy a 18 ezüst a háromnegyede annak, amennyi ezüstje Mohának előtte volt. Ha a háromnegyed rész 18 ezüst, akkor az egynegyed rész $18:3=6$ ezüst, vagyis 6 ezüstöt adott át Moha. De akkor hazaérkezéskor Mohának $18+6=24$, Páfránynak pedig $18-6=12$ ezüstérméje volt. 2 pont
Most nézzük az aranyakat. Páfránynak azután maradt 12 aranya, hogy aranyainak harmadát odaadta Mohának. Ekkor a 12 arany a kétharmada annak, amennyi aranya Páfránynak előtte volt. Ha a kétharmad rész 12 arany, akkor az egyharmad rész 6 arany, vagyis Páfrány 6 aranyat adott át Mohának.
Hazaérkezéskor Páfránynak $12+6=18$, Mohának $12-6=6$ aranyérméje volt. 2 pont
Páfránynak azt követően maradt 12 ezüstérméje, hogy útközben elvesztette ezüstjei felét. Ez azt jelenti, hogy eredetileg 24 ezüstje volt. Aranya kezdetben is annyi volt, mint hazaérkezéskor. 2 pont
Mohának úgy maradt 6 aranyérméje, hogy útközben elvesztette aranyai felét, vagyis

eredetileg 12 aranya volt. Ezüstje kezdetben is ugyanannyi volt, mint hazaérkezéskor. 2 pont

Tehát Moha 12 aranyat és 24 ezüstöt, Páfrány 18 aranyat és 24 ezüstöt vett ki a ládából. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

Legyen Mohának kezdetben *a* aranya és *e* ezüstje, Páfránynak pedig *b* aranya és *f* ezüstje.

Miután a lyukas zsebekből kipotyogtak érmék, hazaérkezéskor Mohának $\frac{1}{2}a$ aranya

és *e* ezüstje, Páfránynak pedig *b* aranya és $\frac{1}{2}f$ ezüstje volt. 1 pont

Otthon, miután Páfrány az aranyérméinek harmadát odaadta Mohának,

Moha, illetve Páfrány aranyérméinek számára felírható az $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b=12$,

illetve a $\frac{2}{3}b=12$ egyenlet. 1 pont

A második egyenletből $b=18$, amelyet az elsőbe helyettesítve $a=12$. 2 pont

Nézzük az ezüstöket. Miután Moha ezüstjeinek negyedét átadta Páfránynak,

a két fiú ezüstjeire a következő egyenletek írhatók fel: $\frac{3}{4}e=18$, valamint $\frac{1}{2}f+\frac{1}{4}e=18$. 1 pont

Az első egyenletből $e=24$, ezt a másikba helyettesítve $f=24$. 2 pont

Tehát Moha 12 aranyat és 24 ezüstöt, Páfrány 18 aranyat és 24 ezüstöt vett ki a ládából. 1 pont

Ellenőrzés: Hazaérkezéskor Mohának 6 aranya és 24 ezüstje,
Páfránynak 18 aranya és 12 ezüstje volt. Páfrány átadott Mohának 6 aranyat,
így mindkettőjüknek 12 aranya lett. Moha odaadott Páfránynak 6 ezüstöt,
így mindkettőjüknek 18 ezüstje lett. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat megoldása:

Egy téglatestnek legfeljebb háromféle különböző hosszúságú éle lehet,
és ezek mindegyikéből 4 darab van. Ezért ha egy téglatestnek van öt egyforma
hosszú éle, akkor ilyen hosszú élből legalább nyolc is van, ami azt jelenti,
hogy a téglatest egy úgynevezett négyzetes oszlop. (Két szemben fekvő lapja négyzet,
a másik négy lapja egybevágó téglalap.) 1 pont

A 2016 prímtényezős felbontása $2016=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7$. 2 pont

A vizsgált téglatest nem lehet kocka, hiszen akkor minden csúcsba három
egyenlő hosszú él futna, így ezek mérőszámainak szorzatában minden prímtényező
darabszámának hárommal oszthatónak kellene lennie. 1 pont

Legyen tehát *a* cm azoknak az éleknek a hossza, amelyekből 8 darab van,
a másik 4 él hossza pedig legyen *b* cm, ahol *a* és *b* különböző pozitív egészek.
Ekkor a téglatest minden csúcsába két darab *a* cm hosszú és egy darab
b cm hosszú él fut. Olyan *a* és *b* különböző pozitív egész számokat
keresünk tehát, amelyekre $a\cdot a\cdot b=2016$. 1 pont

Mivel az $a\cdot a$ szorzat prímtényezős felbontásában minden prímszámból
kétszer annyi tényező szerepel, mint az *a* prímtényezős felbontásában,
így ez utóbbiban legfeljebb két darab 2-es és legfeljebb egy darab 3-as lehet,
7-es pedig nem lehet. Vagyis az *a* osztója a $2\cdot2\cdot3=12$-nek. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy az *a* értéke lehet 1; 2; 3; 4; 6 vagy 12, 1 pont

ekkor a *b* rendre 2016; 504; 224; 126; 56 vagy 14. 1 pont

Tehát hat különböző téglatest felel meg a feltételeknek. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat megoldása:

a) A 4, a 6 és a 8 nem állhatnak az egyes helyiértéken, mert a 2-nél nagyobb páros számok egyike sem lehet prímszám. Így ezen számok helyiértéke mindkét előfordulásuk alkalmával legalább tízes, valódi értékük összesen legalább $2\cdot(4+6+8)\cdot 10=360$. 1 pont

A 2 és az 5 legfeljebb egy alkalommal, egyjegyű szám esetén állhat az egyes helyiértéken, második előfordulásukkor ezeknek is legalább a tízes helyiértéken kell állniuk, különben a 2 esetében páros, az 5 esetében 5-tel osztható legalább kétjegyű számot kapnánk, amely nem prím. Ha a 2-es is és az 5-ös is egyszer a tízes, egyszer pedig az egyes helyiértéken áll, akkor valódi értékük összesen

$(2+5)\cdot 10+(2+5)\cdot 1=77.$ 1 pont

Az 1, 3, 7 és 9 számjegyek valódi értéke akkor lesz a legkisebb, ha mindkétszer az egyes helyiértéken állnak. Ekkor valódi értékük összesen $2\cdot(1+3+7+9)\cdot 1=40$. Ez viszont azt jelenti, hogy a vizsgált összeg nem lehet kevesebb, mint $360+77+40=477$. 1 pont

Az a) kérdésre adott válaszunk akkor teljes, ha legalább egy olyan konstrukciót is mutatunk, amelyikben a számok összege valóban 477. Ezt a kötelezettségünket a b) rész megoldásával túl is teljesítjük, mivel meg fogjuk adni az összes ilyen megoldást.

b) A minimumot akkor lehet elérni, ha minden számjegyet az a) rész megoldásában szereplő legalacsonyabb helyiértéken tartunk. Ennek érdekében a 2 és az 5 csak úgy állhat az egyes helyiértéken, ha mindkettőt külön, egyjegyű prímszámként írta fel Teri. 1 pont

Ha a 8-as a tízes helyiértéken áll, akkor mögé csak a 3 vagy a 9 kerülhet, így ezt a két számot, vagyis a 83-at és a 89-et biztosan fel kellett írnia Terinek. Hasonló okokból fel kellett írnia a 61 és a 67 számokat is. 1 pont

A 2-es és az 5-ös mögött egyaránt csak 3-as vagy 9-es állhat. Ez azt jelenti, hogy vagy a 23 és az 59, vagy a 29 és az 53 került fel a táblára. 1 pont

Ezzel azonban a 3-as és a 9-es már nem szerepelhet többször. Mivel a 4-es után elvileg 1, 3 vagy 7 állhatna, de a 3-asok már „elfogytak”, így a 41 és a 47 is biztosan szerepel a táblán. 1 pont

Vagyis két megoldás van. A Teri által a táblára írt számok, melyek összege mindkét esetben 477:

2; 5; 23; 41; 47; 59; 61; 67; 83; 89 vagy 2; 5; 29; 41; 47; 53; 61; 67; 83; 89. 2 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

4. feladat megoldása:

Ha senki sem tudja utolérni Krisztit, akkor mindenki másnak már csak legfeljebb 5 győzelme lehet a verseny végén. Mivel mindenkinek összesen 7 mérkőzést kell játszania, így ez azt jelenti, hogy a többiek már legalább 2-2 alkalommal kikaptak. 3 pont

Mivel egy mérkőzésen csak egy vesztes van, ezért ahhoz, hogy a másik 7 játékosnak fejenként 2 veresége lehessen, legalább $7\cdot 2=14$ mérkőzést le kellett már játszani a bajnokságban. 3 pont

Ennyi mérkőzésre adható megfelelő konstrukció is, például az alábbi.

Kriszti megverte a következőket: *A*; *B*; *C*; *D*; *E*; *F*, és más meccset nem játszott.

G kikapott *E*-től és *F*-től, ezzel *G*-nek megvan a két veresége. Kell még *A*; *B*; *C*; *D*; *E*; *F*-nek egy-egy vereség. Ők körbeverték egymást: mindenki legyőzte a sorban utána állót, az utolsó pedig az elsőt. Ez $6+2+6=14$ mérkőzés.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. 3 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

1. feladat 1. megoldása:

A 12 zacskóban összesen $1+2+3+...+12=\frac{12\cdot 13}{2}=78$ narancs van.	3 pont
Ha nem lenne igaz a feladat állítása, akkor minden vevő legfeljebb 25 narancsot vett volna.	2 pont
Ekkor azonban hárman együtt legfeljebb $3\cdot 25=75$ narancsot vettek volna.	2 pont
Mivel 78 narancsot vettek hárman együtt, így nem lehetséges az, hogy mindenki legfeljebb 25 narancsot vett, vagyis van közöttük olyan, aki legalább 26 darabot vett.	2 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám:	1 pont
Összesen:	10 pont

2. megoldás:

A 12 zacskóban összesen $1+2+3+...+12=\frac{12\cdot 13}{2}=78$ narancs van.	3 pont
Ez azt jelenti, hogy a vevők átlagosan $78:3=26$ narancsot vettek.	2 pont
Márpedig három olyan szám átlaga, amelyek mindegyike kisebb 26-nál, nem lehet 26.	2 pont
Ez azt jelenti, hogy legalább az egyik vevő 26 vagy több narancsot vett.	2 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám:	1 pont
Összesen:	10 pont

2. feladat 1. megoldása:

Az állítás igaz.	1 pont
Tekintsük először az egyjegyű számokat. Ezek mindegyike előállítható az 1, 2, 4 és 5 számok felhasználásával: 1; 2; $2+1$; 4; 5; $5+1$; $5+2$; $5+2+1$ és $5+4$. Ez jó megoldás, mert az 1, 2, 4 és 5 is osztói a 2000-nek.	2 pont
A kerek tízesek (10; 20; …; 90) az előző alapján előállíthatók, ha minden felbontásban a számok tízszeresét vesszük. Ez jó megoldás, mert a 10, 20; 40 és 50 is osztói a 2000-nek.	1 pont
Mivel a 100; 200; 400 és 500 is osztói a 2000-nek, a kerek százasok is előállíthatók így.	1 pont
Ekkor az 1000-nél kisebb számok mindegyike előállítható. Készítsük el ugyanis a szám helyiértékek szerinti felbontását, majd a fentiek alapján helyiértékenként rakjuk ki.	2 pont
1000-től 1999-ig használjuk fel az 1000-et, ami szintén osztója a 2000-nek, majd a fennmaradó részt az előbb elmondott módon már elő tudjuk állítani.	1 pont
Végül a 2000 osztója önmagának, tehát egytagú összegként előállítható.	1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám:	1 pont
Összesen:	10 pont

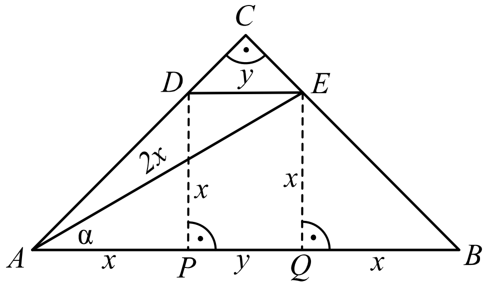
2. megoldás:

Az állítás igaz.	1 pont
Tekintsük először az egyjegyű számokat. Ezek mindegyike előállítható az 1, 2, 4 és 5 számok felhasználásával: 1; 2; $2+1$; 4; 5; $5+1$; $5+2$; $5+2+1$ és $5+4$. (Gondolatban vegyük elé azt, hogy a nullát is előállítjuk úgy, ha nem használtunk fel semmit.)	2 pont
Hogyan tudunk tovább haladni? Az előző előállításokhoz vegyük hozzá 10-től 19-ig a 10-et, 20-tól 29-ig a 20-at, 30-tól 39-ig a 10-et és a 20-at, 40-től 49-ig a 40-et.	1 pont
Ezzel eljutottunk már 1-től (valójában 0-tól) 49-ig. Ha minden eddigi előállításhoz hozzávesszük az 50-et, akkor eljutottunk 99-ig.	1 pont
Az összes eddigi előállításhoz 100-at hozzávéve eljutunk 100-tól 199-ig, 200-at hozzávéve 200-tól 299-ig, 100-at és 200-at hozzávéve 300-tól 399-ig, 400-at hozzávéve 400-tól 499-ig.	1 pont
Az összes eddigi előállítással már eljutottunk 0-tól 499-ig. Ha minden eddigi előállításhoz még hozzávesszük az 500-at, akkor eljutunk 999-ig.	1 pont
Az összes eddig előállításhoz az 1000-et hozzávéve eljutunk 1999-ig.	1 pont
Végül a 2000 osztója önmagának, tehát egytagú összegként előállítható.	1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat megoldása:



Készítsünk egy helyes ábrát. 1 pont

A D-ből és E-ből az átfogóra bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek rendre P és Q. Legyen a DE szakasz hossza y, az EQ szakasz hossza x. Mivel $PQED$ egy téglalap, így $PQ = y$ és $DP = x$. 1 pont

Mivel az ABC háromszög hegyesszögei 45°-osak, így az APD és a BEQ háromszögeknek is van egy 45°-os szöge és egy derékszöge, így ezek is egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Ekkor $AP = QB = x$. 2 pont

Mivel $DE = y$, továbbá $AB = AP + PQ + QB = x + y + x$, ezt a feladatban megadott $DE + EA = AB$ egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $EA = 2x$. 2 pont

Tekintsük most az AQE derékszögű háromszöget. Mivel ebben $EQ = x$ és $EA = 2x$, vagyis az átfogó kétszerese a rövidebb befogónak, így ez egy úgynevezett félszabályos háromszög. 1 pont

A félszabályos háromszögben pedig a rövidebb befogóval szemközti szög $\alpha = 30°$. 2 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

4. feladat megoldása:

Mivel egy lapon csak két színt lehet használni, ezt a feltételek miatt csak úgy lehet megtenni, ha a középső háromszöget festjük ki az egyik színnel, a másik három háromszöget (szélső háromszögek) pedig a másik színnel. 1 pont

Mivel minden színt csak 4 háromszög kifestésére használhatunk, és minden lapon 3 szélső háromszög van, így semelyik két lapon nem lehetnek ugyanolyan színűek a szélső háromszögek. (Ez azért is igaz, mert bármely két lap szomszédos, így a szélső háromszögeik között is vannak szomszédosak, ezek pedig nem lehetnek egyforma színűek.) 1 pont

Ez viszont azt jelenti, hogy mindegyik színt egy lapon a középső, egy másik lapon pedig a három szélső háromszög kifestésére használunk. 2 pont

Tekintsük most azt a lapot, amelyiken a külső háromszögek pirosak. Ezen a lapon a középső háromszög kifestéséhez 3 szín közül választhatunk, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez a szín a fehér. 1 pont

Állítsuk most rá ezt a tetraédert erre a lapjára, és nézzük a három oldallapján csak a külső háromszögek színezését. Fordítsuk úgy a tetraédert, hogy hátul legyen az a lapja, amin a külső háromszögek fehérek. Ekkor a felénk eső két oldallapon kékek és zöldek a külső háromszögek. Ez két (nem egymásba forgatható) módon lehetséges: vagy balról vannak a kékek és jobbról a zöldek, vagy fordítva.
A külső háromszögek színezése tehát kétféle lehet. 1 pont

Nézzük most a három oldallapon a középső háromszögeket. Írjuk fel a lehetséges színhármasokat abban a sorrendben, hogy a külső háromszögek színe rendre fehér, kék, zöld. A következő három lehetőség adódik: PZK, ZPK és KZP. 1 pont

A tetraédert tehát $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$-féleképpen lehet kifesteni a szabályok szerint. 2 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

1. feladat megoldása:

Legyen a két említett külső szög közül a nagyobbik 5α, a kisebbik 3α.
Legyenek továbbá a háromszög csúcsai *A*, *B* és *C*, melyek közül a *C*-nél van a derékszög.
Mivel a derékszögű háromszögnek a derékszög a legnagyobb szöge, így a *C* csúcsnál lévő külső szöge a legkisebb. Ez tehát nem lehet 5α. 1 pont
Nézzük először azt az esetet, amikor a *C* csúcsnál lévő külső szög 3α, míg valamely másik csúcsnál lévő külső szöge 5α. Mivel a *C* csúcsnál lévő külső szög a derékszög kiegészítő szöge, vagyis mértéke 90°, így $3\alpha = 90°$. 1 pont
Innen $\alpha = 30°$, tehát a másik említett külső szög $5\alpha = 150°$. 1 pont
Ennél a csúcsnál lévő belső szög $180° - 150° = 30°$. 1 pont
A háromszög belső szögei tehát ebben az esetben 30°, 60° (és persze 90°). 1 pont
Most nézzük azt az esetet, amikor a két említett szög a két hegyesszögnek a kiegészítő szöge. Mivel a háromszög külső szögeinek összege 360°, amelyből a *C* csúcsnál lévő 90°, így a másik két külső szög összege $360° - 90° = 270°$. 1 pont
Felírható tehát az $5\alpha + 3\alpha = 270°$ egyenlet, melyből $8\alpha = 270°$, azaz $\alpha = 33{,}75°$. 1 pont
A két említett külső szög tehát $5\alpha = 168{,}75°$ és $3\alpha = 101{,}25°$. 1 pont
A háromszög belső szögei tehát ebben az esetben $11{,}25°$, illetve $78{,}75°$ (és persze 90°). 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. feladat megoldása:

a) Egy futam során $10+5+1=16$ pontot szerez a három fiú összesen. 1 pont
Mivel a verseny során hárman együtt $35+27+18=80$ pontot szereztek, ezért a verseny $80:16=5$ futamból állt. 1 pont
b) Ricsi pontszáma 2, Ottó pontszáma 3 maradékot ad 5-tel osztva.
Mivel a megszerezhető pontszámok közül csak az 1 nem osztható 5-tel, így ezt a 2, illetve 3 pontot csak 1 pontokból gyűjthették össze. Ez azt jelenti, hogy Ricsi 2, Ottó pedig 3 futamban lett harmadik. Mivel 5 futam volt összesen, azt is megtudtuk, hogy Pisti egyszer sem lett utolsó. 1 pont
Ha Pisti mindegyik futamban második lett volna, akkor 25 pontja lenne.
Ennél 10-zel több pontja van, ezért két alkalommal nem 5, hanem 10 pontot szerzett.
Ezek szerint Pisti kétszer nyert és háromszor második lett ($2\cdot 10+3\cdot 5=35$). 1 pont
Ricsi a 2 utolsó hely mellett a másik három futamban 25 pontot szerzett.
Ez csak úgy lehet, hogy Ricsi kétszer nyert és egyszer második lett. Ottóról már kiderült, hogy 3 alkalommal lett harmadik, a másik két futam során úgy szerezhetett 15 pontot, ha az egyiket megnyerte, a másikon második lett. 1 pont
Összegezve: Pisti 2, Ricsi 2 és Ottó 1 futamot nyert. 1 pont
c) Az előző részből már kiderült, hogy ki melyik helyezésből mennyi szerzett. Legyen a két első futam, amit Pisti nyert, a következő kettő, amiben Ricsi nyert, és az ötödik, amiben Ottó. Vegyünk fel egy táblázatot, és jelöljük benne a fiúk helyezéseit az egyes futamokban kezdőbetűik beírásával. Pistiről azt is tudjuk, hogy az utolsó három futamban második lett.

	1.f	2.f	3.f	4.f	5.f
1.	P	P	R	R	O
2.	R	O	P	P	P
3.	O	R	O	O	R

Így Pisti helyezését már mind az öt futamban bejelöltük. 1 pont
Nézzük most a harmadik helyezéseket. Az 5. futamban Ricsi, a 3. és 4. futamban Ottó lett a harmadik, hiszen az első két helyezett már ismert. Ottónak 3, Ricsinek 2 utolsó helye volt, ezért az első két futam közül az egyikben Ottó, a másikban Ricsi lett az utolsó, a másik fiú pedig a futammásodik.
Mindegy, melyikük melyikben, hiszen a futamok számozása önkényes volt. 1 pont
Két olyan sorrend van, amilyen sorrendben nem érkeztek célba:
Ricsi, Ottó, Pisti, valamint Ottó, Ricsi, Pisti. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat 1. megoldása:

Tudjuk (például a kis Gauss módszerével), hogy $1+2+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. 1 pont

Írjuk be ezt mindegyik tört nevezőjébe, majd bővítsük a törteket 2-vel,
végül emeljünk ki 2-t. A feladatban szereplő összeg ezen átalakítások után így fog kinézni:

$$K=2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{63\cdot 64}\right)$$ 2 pont

A törtek mindegyike felírható két tört különbségeként, például $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{4-3}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$. 1 pont

A zárójelen belüli összeg minden tagját bontsuk fel ezt felhasználva.

$$\frac{K}{2}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{63}-\frac{1}{64}\right)$$ 1 pont

Észrevehetjük, hogy (az utolsó zárójelet kivéve) mindegyik tört, amely valamelyik
zárójelen belül a második helyen áll mínusz előjellel, az szerepel a következő
zárójelen belül az első helyen plusz előjellel. 1 pont

Vagyis ha a zárójeleket felbontjuk, akkor ebben az úgynevezett teleszkópos összegben
szinte minden tag kiesik, csak az első plusz és az utolsó mínusz előjelű tag marad meg. 1 pont

Vagyis $\frac{K}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$, tehát $K=2\cdot\frac{63}{64}=\frac{63}{32}$. 1 pont

Mivel a 63 és a 32 relatív prímek, így ez a tört már nem egyszerűsíthető, a számláló
és a nevező szorzata pedig $63\cdot 32=2016$. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

Kezdjük kicsivel! Vizsgáljuk meg az első 1, 2, 3, … tört összegét, és
az eredményeket vizsgálva próbáljuk meg kitalálni a zárt alakot. 1 pont

Az első tag $K_1=1$, az első kettő összege $K_2=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$,

az első háromé $K_3=\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{9}{6}=\frac{6}{4}$, az első négyé $K_4=\frac{6}{4}+\frac{1}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$. 1 pont

Észrevehetjük, hogy ha olyan alakra hozzuk az eredményt, amelynek a nevezőjében
az összeadott tagok számánál 1-gyel nagyobb szám szerepel, akkor a számlálóban
a tagok számának kétszerese áll. Vagyis az a sejtésünk, hogy *n* tagra
a keresett összeg zárt alakja $K_n=\frac{2n}{n+1}$. 1 pont

Az állítást teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Már láttuk, hogy az állítás
1-től 4-ig minden pozitív egész számra igaz. 1 pont

Nézzük az indukciós lépést, vagyis lássuk be, hogy ha n-re igaz, akkor $n+1$-re is!

Ehhez használjuk fel, hogy $1+2+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$. 1 pont

$$K_{n+1}=K_n+\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{2n}{n+1}+\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$$=\frac{2n\cdot(n+2)+2}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{2\cdot(n^2+2n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{2\cdot(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{2\cdot(n+1)}{n+2}$$ 2 pont

Teljes indukcióval igazoltuk az állítást, így a keresett tört $K_{63}=\frac{126}{64}=\frac{63}{32}$. 1 pont

Utóbbi alakjában a számláló és a nevező relatív prímek, szorzatuk $63\cdot 32=2016$. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

4. feladat 1. megoldása:

Az állítás igaz. 1 pont

Válasszunk ki két olyan tanulót, akik nem barátok, legyenek ők *A* és *B*.
Ezt nyilván meg lehet tenni, hiszen ha nem lenne két ilyen tanuló, akkor mindenkinek mindenki a barátja lenne az osztályban, de akkor mindenkinek 24 ismerőse lenne, tehát 11-nél több. 2 pont

Mivel *A*-nak is, *B*-nek is legfeljebb 11 barátja van, így kettőjüknek együtt legfeljebb 22 barátja van az osztálytársak között. 2 pont

Mivel *A*-n és *B*-n kívül még 23 tanuló jár az osztályba, így biztosan van köztük legalább egy olyan, aki egyiküknek sem a barátja, hívjuk őt *C*-nek. 3 pont

Tehát találtunk három tanulót, *A*-t, *B*-t és *C*-t, akik megfelelnek a feladat feltételeinek. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

Az állítás igaz. 1 pont

Képzeljük el, hogy az osztály minden tanulója a helyén ül a tanteremben.
Válasszunk ki egy tetszőleges tanulót, nevezzük *A*-nak. Őt kérjük meg, hogy álljon fel, a barátait pedig, hogy menjenek le az udvarra. Legfeljebb 11 tanuló ment le az udvarra, *A* felállt, vagyis még legalább $25-12=13$ tanuló a helyén ül.
A helyükön ülő tanulók egyike sem barátja *A*-nak. 3 pont

Most válasszunk ki az ülők közül egy tetszőleges gyereket, nevezzük *B*-nek.
Róla már tudjuk, hogy nem barátja *A*-nak. Kérjük meg *B*-t, hogy álljon fel, a barátait pedig, hogy menjenek le az udvarra. Mivel a 13 előzőleg ülve maradt gyerek közül 1 állt fel és legfeljebb 11 ment le az udvarra, ezért legalább egy tanuló ülve maradt, nevezzük őt *C*-nek. 3 pont

C nem barátja sem *A*-nak, sem *B*-nek. 1 pont

Tehát találtunk három tanulót, *A*-t, *B*-t és *C*-t, akik megfelelnek a feladat feltételeinek. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A feladat általánosítható: Ha egy $2b+3$ fős osztályban mindenkinek legfeljebb *b* barátja van, akkor ki lehet választani 3 olyan tanulót, akik közül senki sem barátja a másik kettő egyikének sem. Sőt: Ha egy $t\cdot(b+1)+1$ fős osztályban mindenkinek legfeljebb *b* barátja van, akkor ki lehet választani $t+1$ olyan tanulót, akik közül senki sem barátja a másik *t* egyikének sem.

8. osztály – 1. forduló

1. feladat megoldása:

Azok a számok oszthatók 5-tel, amelyek 0-ra vagy 5-re végződnek. Mivel a feladatban szereplő számok nem végződhetnek 0-ra, ezért utolsó számjegyük csak 5 lehet. 1 pont

Azok a számok oszthatók 3-mal, amelyekben a számjegyek összege osztható 3-mal. 1 pont

Mivel a 3-as számjegy osztható 3-mal, így ennek az a feltétele, hogy az 5-ösök száma osztható legyen hárommal. Mivel olyan, legfeljebb ötjegyű számokról van szó, amelyek 5-re végződnek, így ez azt jelenti, hogy a számok pontosan 3 darab 5-ös számjegyet tartalmaznak. 2 pont

A háromjegyű számok között csak 1 ilyen van, az 555. 1 pont

A négyjegyű számok között 3 ilyen van: 3555; 5355 és 5535. 1 pont

Az ötjegyű számok között 6 jó található: 33555; 35355; 35535; 53355; 53535; 55335.	2 pont
Összesen tehát $1+3+6=10$ szám felel meg a feltételeknek.	1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám:	1 pont
Összesen:	10 pont

2. feladat 1. megoldása:

Jelöljük a kiválasztott számok közül a középsőt n-nel. A kiválasztott számok: $n-7$, $n-6$, …, $n-1$, n, $n+1$, …, $n+6$, $n+7$, összegük pedig $15n$.	2 pont
A hibásan kiszámolt összeg akkor lett volna a legkisebb, ha az $n+7$ maradt volna ki. A többi szám összege ekkor $14n-7$ lett volna.	
A kapott összeg ennél nem lehet kisebb, vagyis $14n-7 \le 2016$.	1 pont
Az egyenlőtlenséget megoldva kapjuk, hogy $n \le 144,5$.	1 pont
A hibásan kiszámolt összeg akkor lett volna a legnagyobb, ha az $n-7$ maradt volna ki. A többi szám összege ekkor $14n+7$ lett volna.	
A kapott összeg ennél nem lehet nagyobb, vagyis $14n+7 \ge 2016$.	1 pont
Az egyenlőtlenséget megoldva kapjuk, hogy $n \ge 143,5$.	1 pont
Mivel n egész szám, így a két feltétel csak akkor teljesül, ha $n=144$.	1 pont
A kiválasztott számok összege $15n=15\cdot 144=2160$.	1 pont
Mivel mi 2016-ot kaptunk, így a kimaradt szám a $2160-2016=144$.	1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám:	1 pont
Összesen:	10 pont

2. megoldás:

Legyenek a kiválasztott számok n, $n+1$, $n+2$, …, $n+14$, a véletlenül kifelejtett szám pedig $n+k$, ahol $0 \le k \le 14$ egész szám. Felírható tehát a következő egyenlet: $n+(n+1)+(n+2)+...+(n+14)-(n+k)=2016$	2 pont
Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $14n=1911+k$.	2 pont
A k-ra vonatkozó feltételek miatt ebből adódik, hogy $1911 \le 14n \le 1925$, amelyből 14-gyel való osztás után kapjuk, hogy $136,5 \le n \le 137,5$.	2 pont
Mivel n egész szám, így $n=137$ lehet csak, ekkor $k=14n-1911=7$.	2 pont
A kimaradt szám tehát az $n+k=137+7=144$.	1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám:	1 pont
Összesen:	10 pont

3. megoldás:

Vegyük észre a következőt: Az egész számok összege 137-től 151-ig $\frac{137+151}{2}\cdot 15=2160$.	2 pont
Mivel mi 2016-ot kaptunk, így a kimaradt szám lehet a $2160-2016=144$.	2 pont
Most belátjuk, hogy a feladatnak nincs másik megoldása.	1 pont
Ha az egész számokat 138-tól 152-ig adnánk össze, a helyes összeg 2175 lenne. Az összeg, amit egy kiválasztott szám kihagyásával kaphatunk, legalább $2175-152=2023$, vagyis biztosan több mint 2016. Ugyanígy 2016-nál nagyobb lesz az összeg, ha tovább növeljük a számokat.	2 pont
Ha kisebb számokat veszünk, például 136-tól 150-ig, akkor a helyes összeg 2145 lenne. Az egy szám kihagyása után kapott összeg legfeljebb $2145-136=2009$, vagyis biztosan kisebb 2016-nál. Ha a számokat tovább csökkentjük, a kapott összeg is csökken, vagyis nem lehet 2016.	2 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám:	1 pont
Összesen:	10 pont

3. feladat megoldása:

a) A táblázat n-edik sorának végén álló szám azt mutatja meg, hogy a táblázat első n sorában összesen hány számot írtunk le. Mivel az első sorba 1, a második sorba 2, a harmadik sorba 3 számot, és így tovább, végül az n-edik sorba n számot írtunk le, így ez a szám nem más, mint 1-től n-ig a pozitív egész számok összege. 1 pont

Ezek szerint a 63. sor végén álló szám $1+2+3+...+63=\frac{63\cdot 64}{2}=2016.$ 2 pont

(Az összegzés elvégezhető az általános képlet vagy a kis Gauss módszere segítségével is.)

b) Az a) pontban leírtak miatt a 19. sor végén álló szám $\frac{19\cdot 20}{2}=190,$ 1 pont

így a 20. sor 16. eleme $190+16=206.$ 1 pont

c) Vizsgáljuk meg, hogy ha az egyik oszlopról lépünk a következő oszlopra, akkor mennyivel változik az oszlopösszeg. Lépjünk az első oszlopról a másodikra. Mivel az első oszlop tetején álló 1-es mellett nem áll szám, emiatt az összeg 1-gyel csökken. Az első oszlop többi, 62 darab száma mellett viszont egy 1-gyel nagyobb szám áll, így emiatt az összeg 62-vel nő.

Összességében tehát a második oszlopban $62-1=61$-gyel nagyobb a számok összege. 1 pont

Hasonlóan adódik, hogy a második oszlopról a harmadikra lépve $61-3=58$-cal nő az oszlopösszeg, és így tovább. Meddig tart ez a növekedés?

Próbáljuk megvizsgálni általánosan, mennyi a változás, amikor az n-edik oszlopról az $n+1$-edik oszlopra lépünk! Az első oszlopban 63 szám van, ami minden lépésben 1-gyel csökken, vagyis az $n+1$-edik oszlopban már csak $63-n$ szám lesz. Vagyis a vizsgált lépésben ennyi lesz a növekedés amiatt, hogy minden szám ebben az oszlopban 1-gyel nagyobb, mint a tőle balra álló.

Mennyi lesz a csökkenés? Annyi, amennyi az n-edik oszlop tetején álló szám. De az n-edik oszlop tetején álló szám nem más, mint az n-edik sor végén álló, vagyis az a) rész alapján $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. 1 pont

Az a kérdésünk, hogy mikor lesz a változás pozitív, más szóval nagyobb a növekedés, mint a csökkenés. Nyilván akkor, ha $\frac{n\cdot(n+1)}{2}<63-n$.

Ebből rendezés után kapjuk, hogy $n\cdot(n+3)<126.$ A bal oldali kifejezés pozitív n-ekre szigorúan monoton nő, $9\cdot 12=108<126$, de $10\cdot 13=130<126$, ezért az egyenlőtlenség az $n\le 9$ pozitív egészekre teljesül, innen kezdve megfordul. 1 pont

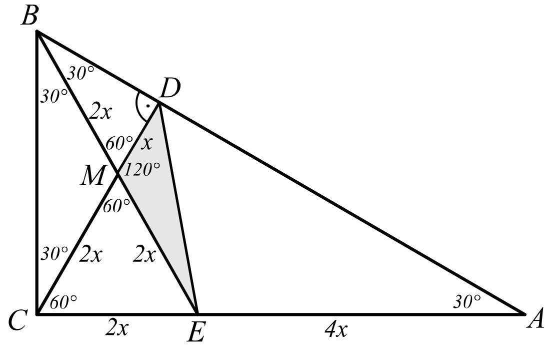
Ez azt jelenti, hogy a vizsgált összeg a 9. oszlopról a 10. oszlopra lépve nő (és előtte is), innen kezdve viszont csökken, tehát a 10. oszlopban lesz a számok összege maximális. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Általánosítás lehetséges. Az a) kérdésben az n. sor végén álló szám $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, a b) kérdésben pedig az n. sor k. helyén álló szám $\frac{n\cdot(n-1)}{2}+k$. A c) kérdésben megvizsgálhatjuk, hogy mi a válasz akkor, ha a táblázatnak s sora van. Ekkor az $n+1$-edik oszlop összege akkor maximális, ha teljesül a $\frac{n\cdot(n+1)}{2}<s-n$ egyenlőtlenség, vagyis $n\cdot(n+3)<2s$.

4. feladat megoldása:



Készítsünk egy ábrát. 1 pont

A DME szög mindkét mellékszöge 60°,
ezért a BDM háromszögben $DBM\angle = 30°$.
Mivel a BE szögfelező, ezért $CBM\angle = 30°$. 1pont

Ezekből a szögekből az ábrára beírt
összes többi szög nagysága is meghatározható. 1pont

A BDM háromszög félszabályos,
ezért átfogója kétszerese a
rövidebb befogónak.
Ha $DM = x$, akkor $BM = 2x$. 1 pont

A BCM háromszög egyenlő szárú, a CEM háromszög szabályos, így $CM = EM = CE = 2x$. 1 pont

Az ACD háromszög is félszabályos, ezért $AC = 2 \cdot CD = 6x$, illetve $AE = 6x - 2x = 4x$. 1 pont

A továbbiakban egy tényt fogunk többször kihasználni: ha két háromszögnek
ugyanakkora a magassága, akkor területeik aránya megegyezik
a közös magassághoz tartozó alapjaik arányával. Induljunk ki az ismert területű
DME háromszögből, jelöljük ennek a területét t-vel.
Ekkor a BDM háromszög területe is t, így a BCM és a CEM háromszög területe $2t$.
Mivel tehát a BCE háromszög területe $4t$, ezért a BEA háromszög területe $8t$. 2 pont

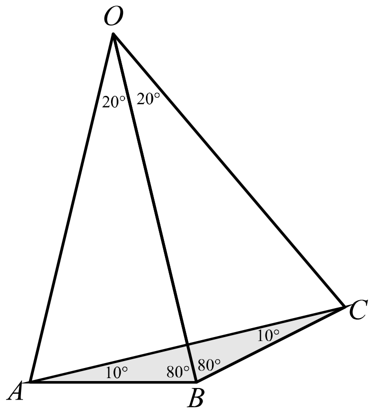
Az ABC háromszög területe tehát $12t = 12 \cdot 168 = 2016\ \text{cm}^2$. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

8. osztály – 2. forduló

1. feladat 1. megoldása:



a) Minden szabályos sokszög köré kör írható.
Ha a szabályos sokszög minden csúcsát összekötjük
a kör O középpontjával, akkor olyan egybevágó
egyenlő szárú háromszögeket kapunk,
amelyeknek alapja a sokszög egy oldala,
szárai pedig a köréírt kör sugarai. 1 pont

Legyen a feladatban említett három szomszédos csúcs
A, B és C. Ha az ABC háromszög alapon fekvő
szögeinek mértéke 10°, akkor a harmadik szög $ABC\angle = 160°$. 1 pont

Mivel az OAB és az OBC háromszögek egybevágóak
és mindketten egyenlő szárúak, így az OB felezi
az ABC szöget, tehát $ABO\angle = CBO\angle = 80°$. 1 pont

Ugyancsak az előbb említett két háromszög egyenlőszárúsága miatt $AOB\angle = BOC\angle = 20°$. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy olyan háromszögek vannak egymás mellé rakva,
amelyeknek az O csúcsnál lévő szöge 20°. Mivel $360° : 20° = 18$,
ezért 18 ilyen háromszögre bontható fel a szabályos sokszög,
tehát a keresett sokszögnek 18 oldala és 18 csúcsa van. 2 pont

b) Egy 18 csúcsú sokszög mindegyik csúcsából 15 átló indul,
hiszen nem indul átló önmagába és a két szomszédos csúcsba. 1 pont

Ha az egyes csúcsokból induló átlók számát összeadjuk,
akkor $18 \cdot 15 = 9 \cdot 30 = 270$ -et kapunk. De ekkor minden átlót kétszer számoltunk,
így ezt még el kell osztani 2-vel. 1 pont

Az átlók száma tehát $270 : 2 = 135$. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás:

a) részre: Ha az *ABC* háromszögben $BAC\angle = ABC\angle = 10°$,

akkor a háromszög *B* csúcsánál lévő külső szöge ezek összege, vagyis 20°. 2 pont

Ez a szög azonban a szabályos sokszögnek is egy külső szöge. 1 pont

Mivel minden konvex sokszögben a külső szögek összege 360°,
továbbá a szabályos sokszög külső szögei egyenlők, 1 pont

így ennek a szabályos sokszögnek $360° : 20° = 18$ külső szöge van, azaz 18 oldalú. 2 pont

2. feladat 1. megoldása:

Nézzük a sor elejéről indulva az első olyan embert, aki nem a helyére ült vissza.
Ő nem tudott máshova ülni, mint a következő helyre. Mivel a visszaülés után is mindenki egy helyet foglalt el, így nem maradhatott üres szék,
tehát az ő eredeti helyére annak az embernek kellett ülnie, akinek ő a helyére ült.
Csak az történhetett, hogy két szomszéd helyet cserélt egymással. 1 pont

Ha most innen folytatjuk, akkor ugyanezt lehet elmondani a következő két olyan emberre, akik nem az eredeti helyükre ültek, és így tovább. A nem a saját helyükre visszaülő embereket olyan párokba kell tudnunk szétosztani,
akik eredetileg egymás mellett ültek, majd helyet cseréltek. 2 pont

Ha az ülésrendet nézzük, akkor ebben 3 helyén maradó ember található
és $(45-3) : 2 = 21$ helyet cserélő pár. Jelöljük a helyén maradó embereket H betűvel,
a helyet cserélő párokat pedig P betűvel. Az a kérdés, hogy hány olyan betűsor van,
amely 3 darab H és 21 darab P betűt tartalmaz**.** 2 pont

Mivel a sor összesen 24 betűből áll, az első H betű helyét 24-féleképpen,
a másodikét 23-féleképpen, a harmadikét 22-féleképpen választhatjuk ki.
Ez összesen $24 \cdot 23 \cdot 22$ lehetőség lenne, ha számítana a kiválasztás sorrendje.
De nem számít, hogy a H betűk közül melyiket hányadikként írtuk a megfelelő helyre,
így minden esetet $3 \cdot 2 \cdot 1$-szer számoltunk, tehát az előbbi eredményt ennyivel el kell osztani. 2 pont

A lehetséges ülésrendek száma tehát $\dfrac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2024$. 2 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám:	1 pont
Összesen:	10 pont

2. megoldás:

Nézzük a sor elejéről indulva az első olyan embert, aki nem a helyére ült vissza.
Ő nem tudott máshova ülni, mint a következő helyre. A visszaülés után is mindenki egy helyet foglalt el, így nem maradhatott üres szék, tehát az ő eredeti helyére annak az embernek kellett ülnie, akinek ő a helyére ült. Csak az történhetett,
hogy két szomszéd helyet cserélt egymással. 1 pont

Ha most innen folytatjuk, akkor ugyanezt lehet elmondani a következő két olyan emberre, akik nem az eredeti helyükre ültek, és így tovább. A nem a saját helyükre visszaülő embereket olyan párokba kell tudnunk szétosztani, akik eredetileg
egymás mellett ültek, majd helyet cseréltek. 2 pont

Hol ülhettek a helyükön maradók? Az előbb elmondottak miatt a sor széle és az ahhoz legközelebbi helyén maradó ember, továbbá két egymás utáni helyén maradó ember között is csak páros számú szék maradhatott,
vagyis ha a székeket megszámozzuk, akkor az első helyén maradó ember
csak páratlan, a második csak páros, a harmadik csak páratlan sorszámú széken ülhetett. 1 pont

Nézzük azt az esetet, ha az első az 1-esen ült. Ekkor ha a második a 2-esen ült,
akkor a harmadik a következő székeken ülhetett: 3, 5, 7, …, 43, 45. Ez eddig 22 eset.
Ha a második a 4-esen ült, akkor eggyel kevesebb hely maradt a harmadiknak,
vagyis 21 helyre ülhetett, és így tovább. Vagyis ha az első az 1-esen ült,

akkor az esetek száma $22+21+20+...+3+2+1=\frac{22\cdot 23}{2}=253.$ 1 pont

Ha az első a 3-ason ült, akkor ugyanígy gondolkodva az összegzést nem 22-től, hanem 21-től kell elkezdeni, így az eredmény 22-vel kevesebb lesz, vagyis 231. 1 pont

Hasonlóan folytatva, az első embert rendre az 5, 7, 9, …, 43 jelű székekre ültetve kiszámoljuk az esetek számát, majd összegezzük. A következő összegzéshez jutunk:

$$253+231+210+190+171+153+136+120+105+91+$$
$$+78+66+55+45+36+28+21+15+10+6+3+1=2024.$$ 2 pont

A lehetséges ülésrendek száma 2024. 1 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

3. megoldás*:*

Nézzük a sor elejéről indulva az első olyan embert, aki nem a helyére ült vissza. Ő csak a következő helyre ülhetett. Mivel a visszaülés után is mindenki egy helyet foglalt el, így nem maradhatott üres szék, tehát az ő eredeti helyére annak az embernek kellett ülnie, akinek ő a helyére ült. Csak az történhetett, hogy két szomszéd helyet cserél egymással. 1 pont

Ha most innen folytatjuk, akkor ugyanezt lehet elmondani a következő két olyan emberre, akik nem az eredeti helyükre ültek, és így tovább. A nem a saját helyükre visszaülő embereket olyan párokba kell tudnunk szétosztani, akik eredetileg egymás mellett ültek, majd helyet cseréltek. 2 pont

Ha az ülésrendet nézzük, akkor ebben 3 helyén maradó ember található és $(45-3):2=21$ helyet cserélő pár. Képzeljük el, hogy ott áll a 21 pár, kézen fogva, mi pedig arra vagyunk kíváncsiak, hogy hányféleképpen lehet a helyükön maradó embereket elhelyezni a sorban a 21 párhoz viszonyítva. A helyükön maradók elhelyezésére 22 hely közül kell választanunk, hiszen kerülhetnek az első pár elé, bármely két szomszédos pár közé és az utolsó pár után is. 1 pont

Ha a három helyén maradó ember egymás mellé ül, akkor erre 22 lehetőség van. 1 pont

Ha ketten egymás mellé ülnek, akkor ők 22 helyre kerülhetnek, a harmadik ember pedig 21 helyre, így erre $22\cdot 21=462$ lehetőség van. 1 pont

Végül, ha mind a hárman magányosan ülnek, akkor $\frac{22\cdot 21\cdot 20}{3\cdot 2\cdot 1}=1540$ lehetőséget kapunk, azzal a gondolattal, amelyet az első megoldásban írtunk le. 1 pont

A lehetséges ülésrendek száma tehát $22+462+1540=2024.$ 2 pont

A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat megoldása:

Mivel a számláló és a nevező is páratlan, így páros számmal biztosan nem lehet egyszerűsíteni a törtet, elég a páratlan számokat vizsgálni. 1 pont

Nézzük elsőként a 3-at. A 6 hatványai oszthatók 3-mal, így elég a másik két hatványt vizsgálnunk. Mivel a 4-nek a 3-as maradéka 1, így minden hatványa is 1 maradékot ad 3-mal osztva. 1 pont

Az 5 hatványainak 3-as maradékát vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a páratlan kitevőjű hatványok 2, a párosak pedig 1 maradékot adnak.

Ez a 4 hatványairól elmondottakkal együtt azt jelenti, hogy a számláló osztható 3-mal, a nevező viszont nem, mert 2 maradékot ad. 1 pont

Ha viszont a nevező nem osztható 3-mal, akkor nem osztható 9-cel sem. 1 pont

Vizsgáljuk az 5-tel való oszthatóságot. Az 5 hatványai oszthatók 5-tel, így elég a 4 és a 6 hatványait vizsgálnunk. A 6-nak az 5-ös maradéka 1, így minden hatványa 1 maradékot ad. 1 pont

Az 4 hatványainak 5-ös maradékát vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a

páratlan kitevőjű hatványok 4, a párosak pedig 1 maradékot adnak.
Ez a 6 hatványairól elmondottakkal együtt azt jelenti, hogy a nevező osztható 5-tel,
a számláló viszont nem, mert 2 maradékot ad. 1 pont
Már csak egy lehetőségünk maradt, a 7, vizsgáljuk a 7-es maradékokat.
A 6 páratlan kitevős hatványai 6, a párosak 1 maradékot adnak, vagyis a számlálóban 1,
a nevezőben 6 az ott szereplő 6-hatvány 7-es osztási maradéka.
A 4 hatványainak 7-es maradékai hármasával ismétlődnek (4, 2, 1),
így a számlálóban szereplő 4-hatvány 7-es maradéka 1, a nevezőben szereplőé pedig 4. 1 pont
Az 5 hatványainak 7-es maradékai pedig hatosával ismétlődnek (5, 4, 6, 2, 3, 1),
így a számlálóban szereplő 5-hatvány 7-es maradéka 5, a nevezőben szereplőé pedig 4. 1 pont
Mivel a kapott maradékok összege a számlálóban $1+5+1=7$, a nevezőben pedig
$4+4+6=14$, ezért mindkettő osztható 7-tel, így a törtet 7-tel lehet egyszerűsíteni.
Azt pedig már korábban láttuk, hogy más 1-nél nagyobb egyjegyű számmal nem. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont

4. feladat megoldása:

Legyen $AC = CO = OD = DB = x$! Ekkor a félkör sugara $2x$, így $OP = OQ = OR = 2x$. 1 pont
Az *ACP*, *OCP*, *ODR*, *BDR* egybevágó derékszögű háromszögekben az átfogó
kétszerese a rövidebb befogónak, így ezek ún. félszabályos háromszögek,
melyek hegyesszögeinek mértéke 30°, illetve 60°. 1 pont
Ebből adódóan az *AOP*, *ORP* és *OBR* háromszögek szabályosak, minden szögük 60°. 1 pont
Thalész ide vonatkozó tételéből tudjuk, hogy az *ABP* háromszög derékszögű.
Mivel $AB = 4x$ és $AP = 2x$, így ez is egy félszabályos háromszög, tehát $ABP\angle = 30°$. 1 pont
Az *OBQ* háromszög egyenlő szárú és derékszögű, ezért $OBQ\angle = OQB\angle = 45°$,
de $ABP\angle = 30°$, továbbá $OBR\angle = 60°$, így $PBQ\angle = 45° - 30° = 15°$ és
$QBR\angle = 60° - 45° = 15°$. 1 pont
Az *OQP* és az *ORQ* háromszögek egyenlő szárúak, szárszögük $POQ\angle = QOR\angle = 30°$,
ezért az alapon fekvő szögeik mértéke $OPQ\angle = OQP\angle = OQR\angle = ORQ\angle = 75°$. 1 pont
Az *OBP* háromszög egyenlő szárú, tehát $OPB\angle = OBP\angle = 30°$,
ezért $BPQ\angle = 75° - 30° = 45°$.
Így a *PQB* háromszög harmadik szöge $PQB\angle = 180° - 15° - 45° = 120°$. 1 pont
A *QRB* háromszögben $BQR\angle = 75° - 45° = 30°$, így $BRQ\angle = 180° - 15° - 30° = 135°$. 1 pont
A *PQB* háromszög szögei 15°, 45°, 120°, a *QRB* háromszög szögei pedig 15°, 30°, 135°. 1 pont
A kiírás alapján járó kiinduló pontszám: 1 pont

Összesen: 10 pont