I. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

5-8. évfolyam

Dunaszerdahely, 2014. május 2-4.

Előszó

„A Mindenség nem értelmetlenül kattogó, öntudatlan gépezet, hanem minden ízében Tudatos világ, amelyet egy Tökéletes Intelligencia teremtett, sőt benne van! Az atomoknak is van szerény értelmük, emlékük, érzékenységük, ők is követnek valamit: egy gondolatot, egy mintát, egy energia-törvényt, amelyből kristályok, hegyek, csillagok lesznek. . . ”.(Müller Péter), és folytatva az idézet értelmét, akkor rájöhetünk, hogy ez a teremtési modell nem más mint a matematika. Hiába tanulunk meg beszélni, mert először nem is tudjuk kimondani azt, ami a lelkünk mélyén él. Elhallgatjuk, vagy mást mondunk helyette. És ha nagy nehezen sikerül is végre kimondani: a másik nem érti meg. A szavakat érti persze, a mondatokat is. Csak ami a szavaink mögött rejlik, vagyis a lényeget, az igazi matematikát, azt nem érti. A megértés ott kezdődik amikor ezekkel a fogalmakkal önkéntelenül, szabadon kezdünk játszani. Newton erre azt mondta: „Nem tudom, a világ hogyan vélekedik rólam, de én magam úgy érzem, olyan vagyok, mint egy kisfiú, aki a tengerparton játszva hol egy simább kavicsot, hol egy szebb kagylót talál, miközben az igazság hatalmas óceánja felfedezetlenül áll előttem”. Majd rájövünk, hogy a matematika nemcsak igazság, hanem magasrendű szépség. „Hideg és szigorú, a szobrászatéhoz hasonló szépség, mely nem fordul gyöngébb természetünk egyetlen részéhez sem, s amely nélkülözi a festészet és a zene elkápráztató kellékeit, viszont fenségesen tiszta, és oly szigorú tökélyre képes, amilyent csak a legnagyobb művészet tud felmutatni.” (Bertrand Russel)

Az 1989-es változások Kelet-Európának új lehetőséget adtak, többnyire elméletileg. A gyakorlati megvalósítás sokszor a mi kamikaze-nak tűnő akciónk volt, ami japánul trópusi ciklont jelent. Igen, ez a szívünkből áradó trópusi ciklon egyesítette újra Trianon után a Kárpát-medence magyar matematikáját. Rögtön létrejött az Erdélyi Magyar Matematikaverseny, és ennek mintájára megalakult 1991-ben a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, a IX-XII. osztályok részére. Mindkettő életben tartását és folytonosságát, egy csodálatos matematikus család működteti. Erdős Pál ezt a folyamatot nevezte a legfontosabb magyar matematikusokat képező tehetséggondozásnak. Működése, az elmúlt negyed század alatt ezt igazolta. Ennyi idő alatt körbejárta a magyarság életterének legfontosabb városait, iskoláit, és mindenütt közösségformáló, békés nemzetegyesítő erejét hagyta hátra. A felvidéki magyar matematikaverseny mellet Délvidéken a Fekete Miháy matematikaverseny működik, Kárpátalján pedig a Bolyai matematikaverseny. Beteges világhatalmak annyira szétfaragták Hazánkat, hogy a világon egyedüli nemzetként elmondhatjuk azt, hogy önmagunkkal vagyunk határosak. Jókai Mór, Klapka György és Nagy Károly személyiségek kettészakított Komárom városát választottuk Oláh György barátommal 1992-ben az első Nemzetközi Magyar Matematikaverseny bölcsőjének. Erdélyt és Felvidéket nemcsak székely eredete, hanem kisebbségi izomorfizmusa is eggyé kovácsolta. Egy fél emberöltő alatt szépen strukturálódott a IX-XII. osztályok Nemzetközi Magyar Matematikaversenye. Ellenben, Erdélyben rájöttünk arra, hogy az V-VIII. osztályok versenyrendszere szerteágazó, ezért a tavaly létrehoztuk az Erdélyi Magyar Matematikaversenyt az V-VIII. osztályok számára. Ezen verseny pozitív tapasztalatának kiterjesztése az I. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny az V-VIII. osztályok részére, aminek az idén Dunaszerdahely a házigazdája 2014. május 2-4. között, nevezetesen a Szabó Gyula Alapiskola. Köszönjük Csölle Teréz igazgatónőnek és munkaközösségének, valamint Liszkay Béla felvidéki régióvezetőnek, hogy felvállalták e csodálatos rendezvényt. Amint fent, úgy lent. Az égi konstellációk alakulása, a bolygók vándorlása a mintája annak a muzsikának, amit az ihlet pillanataiban a komponista belül hall. Ez a „kozmikus-belső” zene jelenik meg aztán a szimfóniákban, a matematika feladatokban, tételekben, és persze minden ihletett alkotásban is. Az égi jelek ragyogják, sugallják, inspirálják át a földi életünket is, és mi dönthetünk úgy, hogy harmóniában együttrezgünk a kozmosszal, de dönthetünk úgy is, hogy mindezekről nem veszünk tudomást. Az matematika versenyek alkalmával a tanulók java része nem azt teszi, mint a hétköznapokon, így lehetősége nyílik kitekinteni a „mókuskerékből”, s észrevenni az elhagyást, az átalakítást igénylő „élet-dolgokat”. Ezért mondjuk azt, hogy bár minden égi helyzet egyszeri, és megismételhetetlen, tehát szent, mégis a piros betűs matematika versenyek csillagjeleire kicsit jobban érdemes odafigyelnünk.

Drága diákjaink, minden matematika verseny egy kihívás, egy fejlődési lehetőség, amit maximálisan át kell élni, és hasznosítani. Évek múlva ti lesztek azok a matematikusok, azok a tanárok, azok a szülők, akik tovább viszitek, éltetitek a magyar matematikát. Ti fogjátok a jövendőbeli generációt nevelni, és amit tőlünk kaptok azt adjátok tovább. Soha ne feledjétek a következő Hamvas Béla idézetet: „A boldogságot csak az bírja el, aki elosztja. A fény csak abban válik áldássá, aki másnak is ad belőle.”

Dr. Bencze Mihály, Bukarest
Erdély régióvezetője

Feladatok

5. (6.) évfolyam

1. A hitelkártya száma egy hatjegyű szám, ahol 1-től 9-ig minden számjegy szerepelhet. Az első két számjegy a 12, ebben a sorrendben, a harmadik számjegy nagyobb, mint 6, a negyedik számjegy osztható 3-mal, az ötödik számjegy 3-szor nagyobb, mint a hatodik. Hány ilyen különböző hatjegyű hitelkártya szám van?

   Lancz István

2. Néhány egy pontból kiinduló félegyenes a síkot szögekre osztja, amelyeknek mértékei $10°, 20°, 30°, \ldots, n \cdot 10°$, ahol n természetes szám.

   (a) Határozzuk meg az n számot és az egy pont körüli szögek mértékét.

   (b) Keressük meg a 90°-os és 180°-os szögeket.

   (c) Hány szög keletkezett? (Egy szög mértéke nem nagyobb 180°-nál)

   Simon József, Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda

3. Felírtuk a természetes számokat 1-től 2014-ig sorban egymás mellé a következő módon: 123456789101112...20132014.

   (a) Hány számjegyből áll ez a számsor?

   (b) Melyik a számsorban a középső számjegy?

   Tóth Gabriella, Palics

4. Hányféleképpen lehet kiszínezni az $ABCDE$ ötszög csúcsait legfeljebb 4 szín felhasználásával, ha a szomszédos csúcsok nem lehetnek egyforma színűek?

   Erdős Gábor, Nagykanizsa

5. Öt lezárt ládába egy-egy fémpénzt tettek: aranyat, ezüstöt, bronzot, platinát és nikkelt. A ládák sorszámozva vannak 1-től 5-ig, és a sorszám mellett egy felirat van a ládán.

   1. Az arany érme a kettesben vagy a hármasban van.

   2. Az ezüst érme az egyesben van.

   3. A bronz érme nincs itt.

   4. A nikkel érme abban a ládában van, amelynek a száma eggyel kisebb az arany érmét tartalmazó láda számánál.

   5. A platina érme abban a ládában van, amelynek a száma eggyel nagyobb a bronz érmét tartalmazó láda számánál.

   Azt is tudjuk, hogy csak az arany érmét tartalmazó láda felirata igaz.

   Melyik ládában melyik pénzérme van?

Róka Sándor, Nyíregyháza

6. 33 ember egy kerek asztal köré ült. Mindegyikük vagy mindig hazudik, vagy mindig igazat mond. Mindegyiket megkérdezik s a válasz: „A tőlen jobbraülő mind a 10 ember hazug”. Hány hazug, és hány igaz ember van köztük?

Mészáros József, Jóka

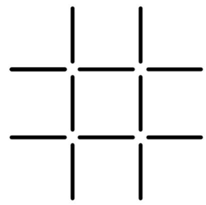
6. (7.) évfolyam

1. (a) Egy természetes szám és a szám 19-szerese között 1 907 darab természetes szám van. Melyik ez a két szám?

   (b) Egy természetes szám és a szám négyzetének 2-szerese között 19 899 darab természetes szám van. Határozzuk meg a két számot.

Simon József, Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda

2. Hány pálcika áthelyezésével érhető el az ábrán, hogy három négyzet keletkezzen, és minden pálcika valamelyik négyzet oldala legyen? (A pálcikákat nem szabad egymásra helyezni.)



Nagy-Baló András

3. A férj és a feleség életkorának az aránya most 8 : 7. Nyolc évvel később ez az arány 10 : 9 lesz. A házasságkötésükkor az életkoruk aránya 6 : 5 volt. Hány évvel ezelőtt kötöttek házasságot?

Lancz István

4. Az ABC háromszögben legyen D a BC oldal C-hez közelebb eső negyedelő pontja, és E az A pont szimmetrikusa a D-re nézve.

   Határozzuk meg az ACD és BCE háromszögek területeinek arányát.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

5. Két padon $6-6$ gyerek ült. Valamennyien különböző életkorúak (az életkorok egész számok), és az egyik padon ülő gyerekek életkorának összege és szorzata is megegyezik a másik padon ülők életkorának összegével és szorzatával. A legidősebb gyerek 16 éves. Hány évesek azok a gyerekek, akik vele egy padon ülnek?

Róka Sándor, Nyíregyháza

6. Adottak az $A=\{1;2;3;\ldots;2012;2013;2014\}$ és $B=\{0;-1;-2;\ldots;-2012;-2013\}$ halmaz. Legyen a c szám az A és B halmazok összes elemeinek összege, d az összes elemük szorzata és e pedig az A halmaz páros elemei összegének és a B halmaz páratlan elemei összegének különbsége. Rakjuk csökkenő sorrendbe a $|c-d|$, $|d-e|$, $|e-c|$ számokat.

Tóth Gabriella, Palics

7. (8.) évfolyam

1. Mutassuk meg, hogy a négyzet felbontható 2014 darab nem feltétlenül egybevágó kisebb négyzetre.

   Mészáros József, Jóka

2. Határozzuk meg azokat az $n = p \cdot q \cdot r$ prímtényezős felbontású számokat amelyekre
$$p \cdot (q-2)(r-2) = 1734.$$

   Zákány Mónika, Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya

3. Hány olyan pozitív, tovább már nem egyszerűsíthető tört van, amelynek számlálóját és nevezőjét is 2-vel növelve a tört értéke megkétszereződik?

   Nagy-Baló András

4. Egy iskolában 17 osztály működik. Egy osztály mindegyik tanulója többi 16 osztályból osztályonként egy-egy tanulót ismer. Igazoljuk, hogy mind a 17 osztály tanulóinak száma megegyezik.

   Bencze Mihály, Ady Endre Gimnázium, Bukarest

5. Az $ABCD$ konvex négyszögben az átlók metszéspontja O, $AD = BC$, az ABC és BDC háromszögek területe és kerülete egyenlő. Tudva, hogy az AOD háromszög területe 9 területegység. Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét.

   Matefi István,

6. A, B, C, D valamelyike betörte az ablakot. Kikérdeztük őket, és az alábbi válaszokat kaptuk:

   A: C volt.

   B: Nem én voltam.

   C: D volt.

   D: C nem mond igazat.

   (a) Ki volt a tettes, ha pontosan egy hazudott?

   (b) Ki volt a tettes, ha pontosan egy mond igazat?

   Róka Sándor, Nyíregyháza

8. (9.) évfolyam

1. Anna vásárolt egy almát, egy banánt és egy narancsot. Ha egy alma harmadába, egy narancs a kétkilencedébe, egy banán a kétharmadába kerülne a jelenlegi árnak, akkor 200 Ft-ot, ha pedig az alma kétötödébe, a narancs felébe, a banán tizedébe kerülne, akkor 100 Ft-ot fizetett volna. Hány forintot fizetett Anna a három gyümölcsért?

   Nagy-Baló András

2. Legyen ABC egy hegyesszögű nem egyenlő oldalú háromszög, A_1, B_1 és C_1 pedig az A, B és C csúcsok tükörképei a szemben lévő oldalakra nézve. Bizonyítsuk be, hogy az A, B és C pontok egyike az $A_1B_1C_1$ háromszög belsejében, egy pedig azon kívül helyezkedik el. Mit mondhatunk a harmadik csúcspontról?

   B. Varga József, Temerin

3. Határozzuk meg az összes $\overline{ab1}$ alakú számokat, melyeket elosztva egy egyjegyű számmal maradékul 8-at kapunk.

   Matefi István,

4. Igazoljuk, hogy az x, y, z, t, u valós számok akkor és csakis akkor egyenlőek, ha

$$|x-y| = 2012|y-z| = 2013|z-t| = 2014|t-u| = 2015|u-x|.$$

   Bencze Mihály, Ady Endre Líceum, Bukarest

5. Mutassuk ki, hogy bármely a és b valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$4(a-b)^2 - 6(a-b) + 4ab + 3 \geq 0.$$

   Milyen esetben kapunk egyenlőséget?

   Zákány Mónika, Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya

6. Ha p prímszám és $p > 3$, akkor $p^2 + 6560$ összetett szám. Bizonyítsuk be az állítást.

   Polcz Zita, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti

Megoldások:

5. (6.) évfolyam – megoldás

1. A hitelkártya száma egy hatjegyű szám, ahol 1-től 9-ig minden számjegy szerepelhet. Az első két számjegy a 12, ebben a sorrendben, a harmadik számjegy nagyobb, mint 6, a negyedik számjegy osztható 3-mal, az ötödik számjegy 3-szor nagyobb, mint a hatodik. Hány ilyen különböző hatjegyű hitelkártya szám van?

Lancz István

Megoldás :

Minden hatjegyű szám 12-vel fog kezdődni.

A harmadik számjegy lehet: $7; 8; 9$
A negyedik számjegy lehet: $3; 6; 9$
Az ötödik számjegy lehet: $3; 6; 9$
A hatodik számjegy lehet: $1; 2; 3$

1.1.3.3.3 = 27 Összesen 27 darab hatjegyű szám lesz:

127331	127362	127393	127631	127662	127693
127931	127962	127993	128331	128362	128393
128631	128662	128693	128931	128962	128993
129331	129362	129393	129631	129662	129693
129931	129962	129993			

2. Néhány egy pontból kiinduló félegyenes a síkot szögekre osztja, amelyeknek mértékei $10°, 20°, 30°, \ldots, n \cdot 10°$, ahol n természetes szám.

   (a) Határozzuk meg az n számot és az egy pont körüli szögek mértékét.

   (b) Keressük meg a 90°-os és 180°-os szögeket.

   (c) Hány szög keletkezett? (Egy szög mértéke nem nagyobb 180°-nál)

Simon József, Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda

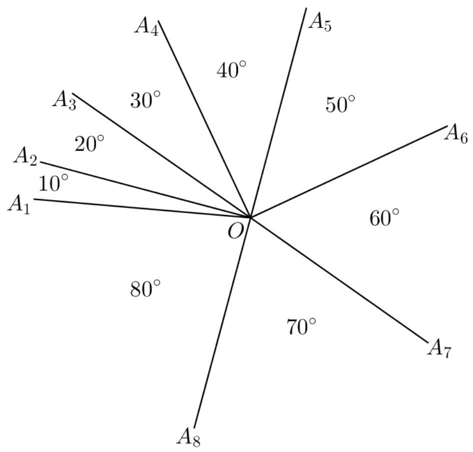
Megoldás:

(a) Az egy pont körüli szögek mértékének összege 360°. Felírhatjuk, hogy:

$$10° + 2 \cdot 10° + \cdots + n \cdot 10° = 360° \qquad / : 10°$$
$$1 + 2 + \cdots + n = 36$$
$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 36$$
$$n \cdot (n+1) = 72 = 8 \cdot 9 \Rightarrow n = 8.$$

A szögek mértékei rendre: $10°, 20°, 30° \ldots, 80°$

(b) Az ábra alapján következik, hogy: $OA_2 \perp OA_8$, $OA_2 \perp OA_5$, $OA_4 \perp OA_6$, továbbá $A_3OA_7 = A_5OA_8 = 180°$.



(c) Az egy és két szöget tartalmazó szögek száma 8, a 3 szöget magába foglaló szögek száma 7, a 4 szöget tartalmazó szögek száma 5, végül az 5 szöget magába foglaló szögek száma 2. Az ábrán összesen 30 darab szög látható.

3. Hányféleképpen lehet kiszínezni az $ABCDE$ ötszög csúcsait legfeljebb 4 szín felhasználásával, ha a szomszédos csúcsok nem lehetnek egyforma színűek?

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Megoldás:

Ha az A és a C egyforma színű (4 lehetőség), akkor B tőlükeltérő (3 lehetőség), D szintén eltér C-től (3lehetőség), míg E színe eltér A-tól és D-től is (2 lehetőség), így az ilyen esetek száma $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$. Ha viszont az A és a C különböző színű ($4 \cdot 3$ lehetőség), akkor B tőlük eltérő (2 lehetőség). Ekkor ha D színe megegyezik A-éval, akkor E-nek 3 lehetősége maradt, hanem, akkor csak 2, így a D és az E színezésére lehetőség adódott, így az ilyen esetek száma $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 168$. Összesen 240 színezés van.

Megjegyzés: A feladat rekurzívan is megoldható, általánosítható: n csúcsra $3^n + (-1)^n$ színezés van.

4. Felírtuk a természetes számokat 1-től 2014-ig sorban egymás mellé a következő módon:

$$123456789101112\ldots20132014.$$

(a) Hány számjegyből áll ez a számsor?

(b) Melyik a számsorban a középső számjegy?

Tóth Gabriella, Palics

Megoldás:

(a) 1 jegyű: 9
2 jegyű: 90, azaz 180
3 jegyű: 900, azaz 2700
4 jegyű: 1015, azaz 4060
Tehá tösszesen 6949 számjegyből áll a felírt számsor.

(b) $6949 = 3474 \cdot 2 + 1$, tehát a 3475. számjegyet keressük. Az egy, két és háromjegyű számokból összesen 2889-et használtunk.
$3475 - 2889 = 586$
$586 = 146 \cdot 4 + 2$, teháta 147. négyjegyű szám 2. számjegyét keressük. A 147. négyjegyű szám a 1146, melynek a másodi kszámjegye az 1.
Ennek a számsornak a közepén az 1-es számjegy helyezkedik el.

5. Öt lezárt ládába egy-egy fémpénzt tettek: aranyat, ezüstöt, bronzot, platinát és nikkelt. A ládák sorszámozva vannak 1-től 5-ig, és a sorszám mellett egy felirat van a ládán.

1. Az arany érme a kettesben vagy a hármasban van.

2. Az ezüst érme az egyesben van.

3. A bronz érme nincs itt.

4. A nikkel érme abban a ládában van, amelynek a száma eggyel kisebb az arany érmét tartalmazó láda számánál.

5. A platina érme abban a ládában van, amelynek a száma eggyel nagyobb a bronz érmét tartalmazó láda számánál.

Azt is tudjuk, hogy csak az arany érmét tartalmazó láda felirata igaz.

Melyik ládában melyik pénzérme van?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

Az első felirat biztosan nem igaz, mert ha igaz lenne, akkor az arany ott lenne, és nem a kettesben vagy a hármasban. Emiatt az arany vagy a 4., vagyaz 5. ládában van. Ezért hamis a 2. és 3. ládán levő feliratis, s ezutóbbi miatt a bronzérme a 3. ládában van.

Ha a 4. láda felirata igaz, akkor itt van az arany, és a felirat szerint a 3. ládában lesz a nikkel érme. Ami nem lehet, mert ott a bronz érme van.

Csak az 5. ládán levő felirat lehet igaz, és itt van az arany. A láda felirata szerint a 4. ládában lesz a platina érme.

A nikkel és az ezüst érme az első két ládában van. A 2. láda felirata hamis, ezért az ezüst a 2., a nikkel pedig az 1. ládában van.

A ládák ban levő érmék rendre: nikkel, ezüst, bronz, platina, arany.

6. 33 ember egy kerek asztal köré ült. Mindegyikük vagy mindig hazudik, vagy mindig igazat mond. Mindegyiket megkérdezik s a válasz: „A tőlen jobbraülő mind a 10 ember hazug”. Hány hazug, és hány igaz ember van köztük?

Mészáros József, Jóka

Megoldás:
3 igaz és 30 hazug ember ül a társaságban. Egy igaz embert 10-10 hazug zárja közre.

6. (7.) évfolyam – megoldás

1. (a) Egy természetes szám és a szám 19-szerese között 1 907 darab természetes szám van. Melyik ez a két szám?
   (b) Egy természetes szám és a szám négyzetének 2-szerese között 19 899 darab természetes szám van. Határozzuk meg a két számot.

Simon József, Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda

Megoldás:

(a) Legyen n és $19n$ a két szám. Felírhatjuk, hogy:

$$19n - n - 1 = 1907 \Leftrightarrow 18n = 1908 \Leftrightarrow n = 106 \text{ és } 19n = 2014.$$

(b) Legyen n és $2n^2$ a két szám. Felírhatjuk, hogy:

$$2n^2 - n - 1 = 19899.$$

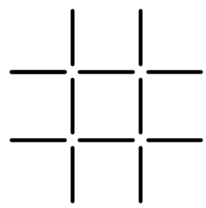
I.megoldás:

$$\begin{aligned} 2n^2 - n &= 19900 \\ n \cdot (2n-1) &= 100 \cdot (2 \cdot 100 - 1) \\ n &= 100 \text{ és } 2n^2 = 20\ 000. \end{aligned}$$

II.megoldás:

$$\begin{aligned} n^2 - n + n^2 - 1 &= 19899 \\ n(n-1) + (n-1)(n+1) &= 19899 \\ (n-1)(2n+1) &= 99 \cdot 2001 \\ n &= 100 \text{ és } 2n^2 = 20\ 000 \end{aligned}$$

2. Hány pálcika áthelyezésével érhető el az ábrán, hogy három négyzet keletkezzen, és minden pálcika valamelyik négyzet oldala legyen? (A pálcikákat nem szabad egymásra helyezni.)

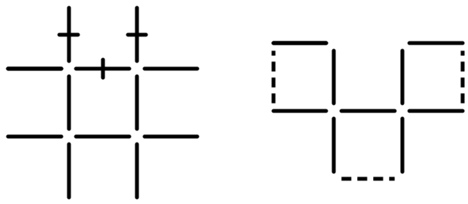


Nagy-Baló András

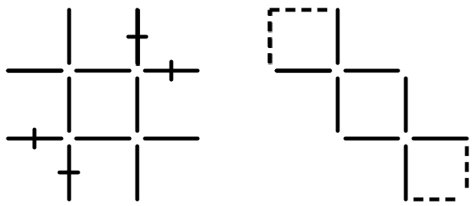
Megoldás:

Megoldás: 1 vagy 2 pálcika áthelyezésével nem érhető el, mert jelenleg 8 olyan pálcika van, amelyek nem oldalai négyzetnek. Ha ebből a 8-ból 2-t áthelyezünk a maradék 6 valamelyikéhez, legfeljebb 4 ilyen pálcikához csatlakoztathatjuk az áthelyezendő 2-t, így 2 pálcika még mindig különálló maradna.

3 pálcikával elérhetjük a kívánt állapotot, ha például az áthúzottak kerülnek a szaggatottal jelölt helyekre:



4 pálcikával az alábbi módon is elérhetjük a kívánt állapotot:



5 pálcika áthelyezésével úgy is megoldhatjuk, mint ahogy 3-mal tettük, csupán 2 pálcikát még kicserélünk egymással. 6 pálcika áthelyezésével elérhetjük a kívánt állapotot ugyanúgy, mint 4 pálcikával, csak még két pálcika helyet cserél egymással. Ennél többel hasonlóan.

3. A férj és a feleség életkorának az aránya most 8 : 7. Nyolc évvel később ez az arány 10 : 9 lesz. A házasságkötésükkor az életkoruk aránya 6 : 5 volt. Hány évvel ezelőtt kötöttek házasságot?

Lancz István

Megoldás:

A férj mostani életkora legyen $8x$, a feleség mostani életkora pedig legyen $7x$. Nyolc év múlva a férj életkora $8x + 8$, a feleségéé pedig $7x + 8$.

Ebből felírható:

$$\begin{aligned}(8x+8) : (7x+8) &= 10 : 9\\ 9(8x+8) &= 10(7x+8)\\ 72x+72 &= 70x+80\\ 2x &= 8\\ x &= 4\end{aligned}$$

A házasságkötés y évvel ezelőtt volt, akkor:

$$\begin{aligned}(32-y):(28-y)&=6:5\\ 5(32-y)&=6(28-y)\\ 160-5y&=168-6y\\ y&=8\end{aligned}$$

Nyolc évvel ezelőtt kötöttek házasságot, ekkor a férj $8\cdot 4-8=24$ a feleség $7\cdot 4-8=20$ éves volt.

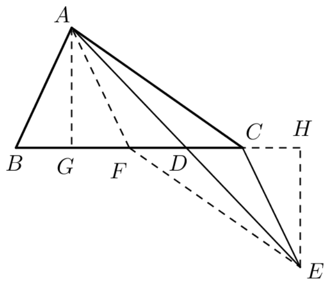
4. Az ABC háromszögben legyen D a BC oldal C-hez közelebb eső negyedelő pontja, és E az A pont szimmetrikusa a D-re nézve.

   Határozzuk meg az ACD és BCE háromszögek területeinek arányát.

   Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás:

Legyen$F$ a BC oldal felező pontja és AG. G, H az A, B -ből BC-re húzott merőleges talppontja. $FD = DC$ és $AD = DE$, ezért $ACEF$ paralelogramma, így EFC és ACF egybevágó háromszögek, tehát $T_{EFC} = Z_{ACF}$.



$T_{ABC} = 2\cdot T_{ACF} = 4\cdot T_{ACD}$, mert $BC = 2\cdot FC = 4\cdot DC$, és mindhárom háromszögnek az A-ból húzott magassága

$T_{BCE} = 2\cdot T_{EFC}$, mert $BC = 2\cdot FC$, és mindkét háromszögnek az E-ből húzott magassága EH.

A fentiek alapján $T_{BCE} = 2\cdot T_{EFC} = 2\cdot T_{ACF} = T_{ABC} = 4\cdot T_{ACD}$. Tehát a keresett arány

$$\frac{T_{ACD}}{T_{BCE}} = \frac{1}{4}$$

5. Két padon $6-6$ gyerek ült. Valamennyien különböző életkorúak (az életkorok egész számok), és az egyik padon ülő gyerekek életkorának összege és szorzata is megegyezik a másik padon ülők életkorának összegével és szorzatával. A legidősebb gyerek 16 éves. Hány évesek azok a gyerekek, akik vele egy padon ülnek?

   Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

Észrevehető, hogy a gyerekek között nem lehet 13 éves, hiszen akkor az egyik padon az életkorok szorzata 13-mal osztható, ám a másik padon számolt szorzat nem lesz osztható 13-mal, ezért a két szorzat nem lehet egyenlő. Ugyanezért 11 éves gyerek sem lehet közöttük.

Jó volna megtalálni a másik két kimaradó életkort, s akkor tudhatnánk mind a tizenkét gyerek életkorát.

Vizsgáljuk meg a többi prímszámot. Lehet-e 7 éves közöttük? Lehet. Az egyik padra 7, a másikra 14 éves gyerek ül, és ekkor mindegyik szorzat osztható lesz 7-tel.

Lehet-e 5 éves közöttük? Itt már felmerülnek problémák. Az 5, 10 és 15 számokat nem lehet a két csoportba megfelelően szétosztani, ugyanis az egyik szorzatban két 5-ös tényező lesz, a másikban csak egy. Tehát az egyik szorzat osztható lenne 25-tel, míg a másik nem, az csak 5-tel osztható. Hiányozni fog az életkorok közül az 5, 10, 15 számok egyike. Számoljuk meg a 3-as tényezők számát. A 3, 6, 9, 12, 15 számokban 1, 1, 2, 1, 1 darab 3-as szorzó van, összesen hat, ezeket szét lehet osztani egyenlően.

Számoljuk meg a 2-es tényezők számát. A 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 számokban levő 2-es tényezők száma rendre: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4. Összesen 15 darab 2-es. Ezért az életkorok közül hiányozni fog páros szám is.

Meg tudjuk-e mondani, melyik a hiányzó négy életkor? Az eddig megállapított feltételeket – a megmaradó 12 számban páros legyen a 2-es, 3-as, 5-ös, 7-es prímtényezők száma - több lehetőség is kielégíti: $(1; 10; 11; 13)$, $(4; 10; 11; 13)$, $(9; 10; 11; 3)$, $(2; 15; 11; 13)$, $(8; 5; 11; 13)$, $(6; 11; 13; 15)$.

Fárasztó lenne ezeknek lehetőségeknél megnézni, hogy a megmaradó 12 szám szétosztható-e a kívánt módon. Mit tehetünk? Még nem vettük figyelembe az összegek egyenlőségét. Ez azt jelenti, hogy a 12 szám összege páros.

Szerencsénk van: a felsorolt lehetőségekből csak egy teljesíti ezt. A megoldás egy fontos állomásához értünk, tudjuk melyik a négy hiányzó életkor: 4, 10, 11 és 13.

Az 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16 számokat kell a kívánt módon két csoportba osztani. Ezen számok összege 98, tehát egy-egy padon a hat életkor összege 49. Ezen számokban a 2-es tényezők száma 12, ezért a 16 mellé úgy kell számokat választani, hogy azokban 2 darab 2-es tényező legyen, hiszen a 16-ban 4 darab 2-es tényező van. Ha figyelembe vesszük azt is, hogy a hat szám összege páratlan, akkor a 16 mellé két páros számot kell választanunk, és ez a két szám csak a 2, 6, 14 számok közül kerülhet ki. Ez a választás 3-féle módon tehető meg.

Vegyük sorra a lehetőségeket.

Egy csoportba került a 16, 14, 6. A hat szám összege 49, ezért a hiányzó három páratlan szám összege 13. Lesz a csoportban 5-tel osztható szám is, a 15 nem lehet, mert nagyobb 13-nál, tehát az 5-öt választjuk. Már csak a 3-as tényezők számát kell kiegészíteni 3-ra: 2 darab 3-as tényező hiányzik. Ez megtehető az 1 és a 9 választásával, de ezek összege 10, noha most az összeg hiányzó része 8. A most vizsgált lehetőség nem ad megoldást.

Legyen egy csoportban a 16, 14, 2. A hiányzó számok összege 17 lesz. A 15-öt nagysága miatt nem választjuk, tehát a csoport 5-tel osztható száma az 5 lesz. 3-mal osztható szám még nincs a kiválasztottak között, a hiányzó két számnak 3 darab 3-as tényezőt kell behozni. Ez egyféleképpen megtehető, a 3 és a 9 választásával. Találtunk egy megoldást: **egy padon ülnek a 2, 3, 5, 9, 14 és 16 éves gyerekek.**

Még egy lehetőséget meg kell vizsgálnunk, amikor egy csoportban van a 16, 6, 2. A hiányzó számok összege 25. 7-tel osztható páratlan számot választani kell, tehát a 7-et választjuk. Szükség van 1 darab 5-ös és 2 darab 3-as tényezőre. Ez a 15 és a 3 választásával megoldódik. Talál-tunk egy másik megoldást: **egy padon ülhetnek a 2, 3, 6, 7, 15, 16 éves gyerekek.**

6. Adottak az $A = \{1; 2; 3; \ldots; 2012; 2013; 2014\}$ és $B = \{0; -1; -2; \ldots; -2012; -2013\}$ halmaz. Legyen a c szám az A és B halmazok összes elemeinek összege, d az összes elemük szorzata és e pedig az A halmaz páros elemei összegének és a B halmaz páratlan elemei összegének különbsége. Rakjuk csökkenő sorrendbe a $|c-d|, |d-e|, |e-c|$ számokat.

Tóth Gabriella, Palics

Megoldás:

A két halmaz összes elemének összege $c = 2014$.

A két halmaz összes elemének szorzata $d = 0$.

Az A halmaz pároselemei: $2, 4, 6, 8, \ldots, 2010, 2012, 2014$. (összesen 1007 szám) Összegük $2016 \cdot 503 + 1008 = 1015056$. A B halmaz páratlan elemei: $-1, -3, -5, \ldots, -2009, -2011, -2013$ (összesen 1007 szám) Melyek összege:$-2014 \cdot 503 - -1007 = -1014049$. $e = 1015056 - (-1014049) = 2029105$

Csökkenő sorrendben tehát: $|d-e|, |e-c|, |c-d|$.

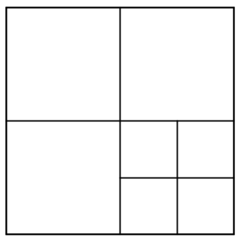
7. (8.) évfolyam – megoldás

1. Mutassuk meg, hogy a négyzet felbontható 2014 darab nem feltétlenül egybevágó kisebb négyzetre.

Mészáros József, Jóka

Megoldás:

Az ábra szerint a négyzet $7 = 3 \cdot 2 + 1$ darab kisebb négyzetre bontható. Mivel $2014 = 3 \cdot 671 + 1$, ezért a felbontás lehetséges.



2. Határozzuk meg azokat az $n = p \cdot q \cdot r$ prímtényezős felbontású számokat amelyekre

$$p \cdot (q-2)(r-2) = 1734.$$

Zákány Mónika, Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya

Megoldás:

$p \cdot (q-2) \cdot (r-2) = 1734$ páros, tehát valamelyik tényező páros. $q-2$ és $r-2$ nem lehet páros, tehát csak a $p=2$ elfogadható. Így

$$(q-2) \cdot (r-2) = 867 = 1 \cdot 867 = 3 \cdot 289 = 17 \cdot 51$$

Mivel q és r prím, ezért csak a $q=19$ és $r=53$ lesz a megoldás. Tehát a keresett szám az $n = 2 \cdot 19 \cdot 23 = 2014$.

3. Hány olyan pozitív, tovább már nem egyszerűsíthető tört van, amelynek számlálóját és nevezőjét is 2-vel növelve a tört értéke megkétszereződik?

Nagy-Baló András

Megoldás:

Keressük meg az összes olyan $\frac{a}{b}$ pozitív, tovább már nem egyszerűsíthető törtet, amelyre igaz, hogy

$$\frac{a+2}{b+2} = 2 \cdot \frac{a}{b}$$

Nyilvánvalóan b nem lehet sem 0, sem -2, ugyanis a törteknek nem volna értelmük. Egyenértékű átalakításokat végzünk az egyenlőségen:

$$\frac{a+2}{b+2} = 2 \cdot \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(a+2) = 2a(b+2) \Leftrightarrow ab+2b = 2ab+4a \Leftrightarrow ab-2b+4a = 0 \Leftrightarrow (a-2)(b+4)+8 = 0 \Leftrightarrow$$

Mivel $-8 = (-8) \cdot 11 = (-4) \cdot 2 = (-2) \cdot 4 = (-1) \cdot 8 = 1 \cdot (-8) = 2 \cdot (-4) = 4 \cdot (-2) = 8 \cdot (-1)$, ezért $a-2$, illetve $b+4$ lehetséges értékei:

$a-2$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$b+4$	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1

ahonnan megkaphatjuk a, illetve b, és ezt követően $\frac{a}{b}$ értékét:

a	-6	-2	0	1	3	4	6	10
$b+4$	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1
$\frac{a}{b}$	$\frac{-6}{-3}$	$\frac{-2}{-2}$	értelmetlen	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{-12}$	$\frac{4}{-8}$	$\frac{6}{-6}$	$\frac{10}{-3}$

Közülük az egyetlen tovább már nem egyszerűsíthető pozitív tört az $\frac{1}{4}$, és ez valóban teljesíti is a feltételt, hisz $\frac{1+2}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4}$. Tehát egyetlen olyan tört létezik, amelyik eleget tesz a feladat feltételeinek.

4. Egy iskolában 17 osztály működik. Egy osztály mindegyik tanulója többi 16 osztályból osztályonként egy-egy tanulót ismer. Igazoljuk, hogy mind a 17 osztály tanulóinak száma megegyezik.

Bencze Mihály, Ady Endre Gimnázium, Bukarest

Megoldás:

Elégséges, ha az A és B osztályról kimutatjuk, hogy tanulóinak a száma megegyezik. Tételezzük fel, hogy az A osztályban több tanuló van, mint a B osztályban. Mivel minden tanuló az A osztályból csak egy tanulót ismer a B osztályból, ezért az A osztályban létezik legalább 2 tanuló, x és y aki nugyanazt a z tanulót fogja ismerni a B osztályból. Tehát a z tanuló A osztályból két tanulót ismer és ezzel ellentmondáshoz jutottunk. Tehát mind a 17 osztály tanulóinak a száma megegyezik.

5. Az $ABCD$ konvex négyszögben az átlók metszéspontja O, $AB = BC$, az ABC és BDC háromszögek területe és kerülete egyenlő. Tudva, hogy az AOD háromszög területe 9 területegység. Számítsuk ki az $ABCD$ négyszög területét.

Matefi István,

Megoldás:

Mivel $T_{ABC} = T_{BDC} \Rightarrow AM = DN$ és $AM \parallel DN$, ahol$AM \perp BC$ és M illeszkedik a BC szakaszra, valamint $DN \perp BC$ és N a BC szakaszra illeszkedik. Ez az tjelenti, hogy az $AMND$ négyszög paralelogramma, tehát $AD \parallel BC$. Feltételszerint $AD = BC$, tehát $ABCD$ is paralelogramma. De mivel $K_{ABC} = K_{BDC}$ és $AB = DC$ kapjuk, hogy $BD = AC$, tehát $ABCD$ téglalap. $T_{ABCD} = 4 \cdot T_{AOD} = 36$ területegység.

6. A, B, C, D valamelyike betörte az ablakot. Kikérdeztük őket, és az alábbi válaszokat kaptuk:

A: C volt.

B: Nem én voltam.

C: D volt.

D: C nem mond igazat.

(a) Ki volt a tettes, ha pontosan egy hazudott?

(b) Ki volt a tettes, ha pontosan egy mond igazat?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

(a) A és C állítása ellent mondásban van, így van közte hamis állítás. Hasonló a helyzet C-t ésD-t tekintve is. Ezek szerint C állítása a hamis, a többieké pedig igaz, ezért C törte be az ablakot.

(b) C és D állítása nem lehet egyszerre hamis, hiszen ha C állítása hamis, akkor D állítása igaz, tehát C vagy D igazat állít. Ha D állítása hamis, és összhangban ezzel$C$-é igaz, akkor hamisak az A és B által mondottak is. Ekkor viszont B hamis állításából következően B, míg C igazállításából kifolyólag D a tettes, ez pedig nem lehetséges. Ezek után már csak az képzelhető el, hogy az első három állítás volt hamis, és az utolsó igaz, így B a tettes.

8. (9.) **évfolyam** – megoldás

1. Anna vásárolt egy almát, egy banánt és egy narancsot. Ha egy alma harmadába, egy narancs a kétkilencedébe, egy banán a kétharmadába kerülne a jelenlegi árnak, akkor 200 Ft-ot, ha pedig az alma kétötödébe, a narancs felébe, a banán tizedébe kerülne, akkor 100 Ft-ot fizetett volna. Hány forintot fizetett Anna a három gyümölcsért?

Nagy-Baló András

Megoldás:

Az alma árát a-val, a banán árát b-vel és a narancs árát n-nel jelölve, a feltételek alapján felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$\frac{1}{3}\cdot a+\frac{2}{9}\cdot n+\frac{2}{3}\cdot b=200$$
$$\frac{2}{5}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot n+\frac{1}{10}\cdot b=100$$

Az első egyenlőséget 9-cel, a másodikat 10-zel végigszorozva kapjuk, hogy:

$$2a+2n+6b=10800$$
$$4a+5n+b=1000$$

Ha összeadjuk e két utóbbi egyenlőség megfelelő oldalait, a

$$7a+7n+7b=2800$$

Egyenlőséghez jutunk, amit 7-tel osztva kapjuk, hogy:

$$a+n+b=400$$

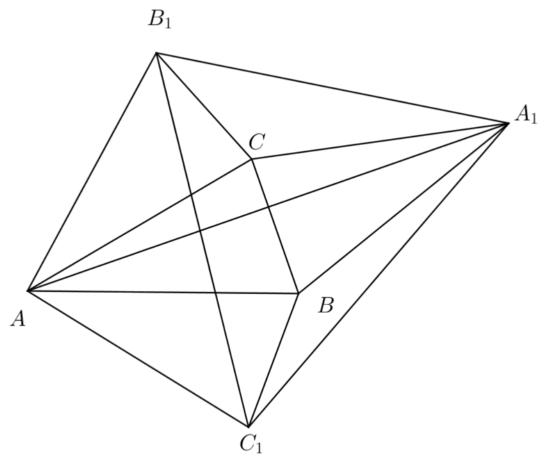
Tehát a három gyümölcsért Anna 400 Ft-ot fizetett.

2. Legyen ABC egy hegyesszögű nem egyenlő oldalú háromszög, A_1, B_1 és C_1 pedig az A, B és C csúcsok tükörképei a szemben lévő oldalakra nézve. Bizonyítsuk be, hogy az A, B és C pontok egyike az $A_1B_1C_1$ háromszög belsejében, egy pedig azon kívül helyezkedik el. Mit mondhatunk a harmadik csúcspontról?

B. Varga József, Temerin

Megoldás:

Az ABC, A_1BC, AB_1C és ABC_1 háromszögek egybevágóak, ugyanis az utolsó három az első tükörképe. Mivel a háromszög nem egyenlő oldalú, ezért egyik szöge kisebb, mint 60°. Az áltanosságot nem csökkentve feltételezhetjük, hogy ez az A csúcsnál lévő szög. Mivel a B és C csúcsnál lévő szögek is hegyesszögek ezért az ACA_1 szög amely tartalmazza a BC szakaszt és az ABA_1 szög is amely tartalmazza a BC szakaszt kisebbek az egyenesszögnél. Ezért az ABA_1C négyszög konvex deltoid, vagyis az AA_1 szakasz a $BAC\sphericalangle$ szög belsejében van. A $C_1AB_1\sphericalangle$ szög, amely magába foglalja a $BAC\sphericalangle$ szöget kisebb $3 \cdot 60°$-nál, azaz az egyenesszögnél, tehát az $AC_1A_1B_1$ négyszög konvex, vagyis az A pont nincs az $A_1B_1C_1$ háromszög belsejében. Hasonlóképpen feltételezhetjük, hogy a B csúcsnál lévő $ABC\sphericalangle$ szög nagyobb mint $60^{\&irc}$. Ekkor a $C_1BA1\sphericalangle$ szög amely magába foglalja az $ABC\sphericalangle$ szöget konkáv szög. A BB_1 szakasz az $ABC\sphericalangle$ szög belsejében van, tehát benne van a $C_1BA_1\sphericalangle$ szög belsejében is.



Az elmondottakból következik, hogy a $C_1BA_1B_1$ négyszög konkáv és a konkáv szöge a B csúcsnál van, azaz a B pont az ABC háromszög belsejében található. Az előzőekből az is kiviláglik, hogy az ABC hegyesszögű háromszög azon csúcsai vannak az $A_1B_1C_1$ belsejében, amelyeknél lévő szög nagyobb mint 60° és azok vannak kívül, amelyiknél lévő szög kisebb mint 60°. Ha a csúcsnál lévő szög 60°-os akkor a csúcs az $A_1B_1C_1$ háromszög megfelelő oldalának pontja lesz.

3. Határozzuk meg az összes $\overline{ab1}$ alakú számokat, melyeket elosztva egy egyjegyű számmal maradékul 8-at kapunk.

Matefi István,

Megoldás:

A maradékos osztás tétele szerint $\overline{ab1} = 9 \cdot q + 8$, $\overline{ab1}$ utolsó számjegye 1, ha a q utolsószámjegye 7.

T ehát $q \in= \{7; 17; 27; 37; 47; \dots\}$, de $9\cdot 7+8 = 71$ nem $\overline{ab1}$ alakú, demár $9\cdot 17+8 = 161$ márilyen alakú, tehát $\overline{ab1} = \{161; 251; 341; 431; 521; 611; 701; 791; 881; 971\}$.

4. Igazoljuk, hogy az x, y, z, t, u valós számok akkor és csakis akkor egyenlőek, ha

$$|x - y| = 2012|y - z| = 2013|z - t| = 2014|t - u| = 2015|u - x|.$$

Bencze Mihály, Ady Endre Líceum, Bukarest

Megoldás:

I. rész: Legyen $|x - y| = k$, akkor $x - y| = \pm k$, $y - z = \pm\frac{k}{2012}$, $z - t = \pm\frac{k}{2103}$, $t - u = \pm\frac{k}{214}$, $u - x = \pm\frac{k}{2015}$

1) Ha $k = 0$, akkor $x = y = z = t = u$

2) Ha $k \neq 0$, akkor összeadva a fentieket, azt kapjuk, hogy

$$0 = \left(\pm 1 \pm \frac{1}{2012} \pm \frac{1}{2013} \pm \frac{1}{2014} \pm \frac{1}{2015} \right) \cdot k,$$

azaz

$$\frac{1}{2015} = \pm 1 \pm \frac{1}{2012} \pm \frac{1}{2013} \pm \frac{1}{2014} = \frac{m}{2012 \cdot 2013 \cdot 2014},$$

ahol $m \in Z$. De ez ellentmondás, mert $2012 \cdot 2013 \cdot 2014$ nem osztható 2015-tel.

II. rész: Ha $x = y = z = t = u$, akkor az összefüggés igaz.

5. Mutassuk ki, hogy bármely a és b valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$4(a-b)^2 - 6(a-b) + 4ab + 3 \geq 0.$$

Milyen esetben kapunk egyenlőséget?

Zákány Mónika, Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya

Megoldás:

$$4(a-b)2 - 6(a-b) + 4ab + 3 = (2a-1)^2 - (2a-1)(2b+1) + (2b+1) \geq 0$$

Legyen $x = 2a - 1$ és $y = 2b + 1$, ekkor kapjuk, hogy

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$$

Ez viszont nyilvánvalóan teljesül. Egyenlőség csak $x = y = 0$ esetben fog teljesülni, azaz $a = \dfrac{1}{2}$ és $b = -\dfrac{1}{2}$.

6. Ha p prímszám és $p > 3$, akkor $p^2 + 6560$ összetett szám. Bizonyítsuk be az állítást.

Polcz Zita, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti

Megoldás:

Előbb bebizonyítjuk azt,hogyha p prímszám és $p > 3$, akkor $p^2 - 1$ osztható 3-mal.

$(p-1)p(p+1)$ osztható 3 -mal, mert három egymást követő szám szorzata. Mivel p prím szám és $p > 3$, következik, hogy a $(p-1)(p+1)$ szorzat osztható 3-mal, azaz $p^2 - 1$ osztható 3-mal.

Ekkor$p^2 + 6560 = (p^2 - 1) + 1 + 6560 = (p^2 - 1) + 6561 = (p^2 - 1) + 3^8$.

Következik, hogy $p^2 + 6560$ osztható 3-mal, tehát összetett szám.

Eredmények:

5. (6.) évfolyam

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Helyezés
1.	Rokonay Sonja	10	10	10	5	10	10	55	1.
	Herman Ottó Gimnázium, Miskolc, Magyarország								
2.	Tóth Lili Anna	10	6	10	4	9	10	49	2.
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
3.	Mészár Anna Orsolya	10	7	10	4	10	5	46	2.
	Csíky Gergely Nemzeti Kollégium, Arad, Erdély								
4.	Laczkó Csongor	10	3	10	5	10	5	43	2.
	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy, Erdély								
5.	Süli Ákos	10	8	9	4	4	7	42	2.
	Széchenyi István Ált. Isk., Szabadka, Délvidék								
6.	Bencsik Eszter	10	4	9	4	7	5	39	3.
	Kossányi József Alapiskola és Óvoda, Szentpéter, Felvidék								
7.	Fehér Konrád	10	8	10	3	3	5	39	3.
	Jovan Mikity Ált. Isk., Szabadka, Délvidék								
8.	Ferencz Eszter	10	1	10	5	6	7	39	3.
	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy, Erdély								
9.	Papán Attila	10	3	6	3	10	7	39	3.
	Márai Sándor Gimnázium és Alapiskola, Kassa, Felvidék								
10.	Kotró-Kosztándi Anna	10	1	9	3	10	5	38	3.
	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy, Erdély								
11.	Vitálos Ágnes	10	1	9	2	9	6	37	Dics.
	Selye János Gimnázium, Révkomárom, Felvidék								
12.	Ördög Kinga	10	1	8	2	10	5	36	Dics.
	József Attila Általános Iskola, Csíkszereda, Erdély								
13.	Árva Norbert Ákos	5	1	10	3	9	7	35	Dics.
	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad, Erdély								
14.	Hegedűs Dániel	10	1	9	3	10	2	35	Dics.
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
15.	Osztényi József	10	4	10	3	7	1	35	Dics.
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
16.	Bíró Mátyás Péter	6,5	8	1	4	10	5	34,5	Dics.
	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár, Erdély								
17.	Karácsony Gyula	8	1	6	3	10	6	34	Dics.
	Vámbéry Ármin Gimnázium, Dunaszerdahely, Felvidék								
18.	Péter Ákos	6	1	6	3	10	7	33	Dics.
	Kiss Ferenc Általános Iskola, Csíkmadaras, Erdély								
19.	Bucescu Andrea-Blanka	10	1	6	2	10	3	32	Dics.
	Áprily Lajos Nemzeti Kollégium, Brassó, Erdély								

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Helyezés
20.	Fogarasi András	10	1	5	2	9	5	32	Dics.
	Nicolae Titulescu Általános Iskola, Kolozsvár, Erdély								
21.	Farkas Jázmin	8	1	7	4	5	6	31	Dics.
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
22.	Kőházi-Kiss Anna	8	1	5	2	10	5	31	Dics.
	Kodály Zoltán Ének-Zenei Ált. Isk. és Gimn., Kecskemét, Magyarország								
23.	Páll László	10	1	4	4	7	5	31	Dics.
	Beregrákosi Általános Iskola, Kárpátalja								
24.	Aczél Szabó János	6	6	5	1	10	2	30	Dics.
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
25.	Nyerges Áron	8	3	1	3	8	5	28	
	Kodály Zoltán Ének-Zenei Ált. Isk. és Gimn., Kecskemét, Magyarország								
26.	Muszka Csaba	6,5	1	7	1	9	2	26,5	
	Josephus Calasantius Római Katolikus Líceum, Nagykároly, Erdély								
27.	Mátyás András	5	1	9	4	2	5	26	
	József Attila Általános Iskola, Csíkszereda, Erdély								
28.	Tóth Tamás	5	1	10	3	2	5	26	
	Hunyadi János Ált. Isk., Csantavér, Délvidék								
29.	Fodor Gábor	3	7	2	1	7	5	25	
	Majsai Úti Ált. Isk., Szabadka, Felvidék								
30.	Divin Judit	3,5	1	5	2	10	3	24,5	
	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad, Erdély								
31.	Fodor Gergely	8	1	6	2	2	1	20	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
32.	Uhlár Balázs	8	1	3	1	2	5	20	
	Kodály Zoltán Ének-Zenei Ált. Isk. és Gimn., Kecskemét, Magyarország								
33.	Radványszky Ágoston	10	1	5	1	1	1	19	
	Bethlen Gábor Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja								
34.	Kiss Balázs	10	1	2	1	1	2	17	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
35.	Paraszti Emőke	10	1	2	1	1	2	17	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
36.	Serfőző Dzsenifer Fanni	4,5	1	3	2	1	2	13,5	
	Kossuth Lajos Gimnázium, Cegléd								
37.	Stercli Kristóf	1	1	2	1	2	1	8	
	Bolyai János Középiskola, Aknaszlatina, Kárpátalja								

6. (7.) évfolyam

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Helyezés
1.	Roth Apor	10	8	10	10	8	9	55	1.
	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy, Erdély								
2.	Miklós Csenge	10	8	10	1	10	10	49	1.
	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy, Erdély								
3.	Krista Roland	8	8	10	10	3	4	43	2.
	Felvidék								
4.	Józsa Kriszta	8	8	5	4	7	10	42	2.
	Áprily Lajos Nemzeti Kollégium, Brassó, Erdély								
5.	Csóka Alexandra	4	8	10	7	2	10	41	2.
	Felvidék								
6.	Miklós Dóra	10	8	9	7	1	6	41	2.
	Székely Mózes Általános Iskola, Lövéte, Erdély								
7.	Szabó Dóra Renáta	8	8	10	7	1	6	40	2.
	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely, Erdély								
8.	Móra Attila	10	8	10	2	3	6	39	3.
	Felvidék								
9.	Jánosdeák Márk	10	8	9	1	1	8	37	3.
	Selye János Gimnázium, Révkomárom, Felvidék								
10.	Espáni Márta	9	9	5	2	3	7	35	3.
	Herman Ottó Gimnázium, Miskolc, Magyarország								
11.	Pinke Andrea	10	8	8	1	5	3	35	3.
	Selye János Gimnázium, Révkomárom, Felvidék								
12.	Hugyik Kornél	5	8	9	1	1	10	34	Dics.
	Testvériség – Egység Ált. Isk., Bajsa, Délvidék								
13.	Boros Csaba	10	8	4	3	2	6	33	Dics.
	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti, Erdély								
14.	Ambrus Egyed Ágnes	10	10	5	2	1	4	32	Dics.
	János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár, Erdély								
15.	Görcs András	10	8	5	2	1	6	32	Dics.
	Madách Imre Gimnázium, Somorja, Felvidék								
16.	Jakab Etele	1	8	10	1	1	10	31	Dics.
	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely, Erdély								
17.	Szőke Máté	10	2	10	1	1	6	30	Dics.
	Deák Ferenc Gimnázium, Pécs, Magyarország								
18.	Altman Tamás	5	8	8	1	1	6	29	Dics.
	Felvidék								
19.	Kiss Andrea Tímea	10	2	7	2	1	6	28	
	Konsza Samu Általános Iskola, Nagybacon, Erdély								

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Helyezés
20.	Monori János Bence	5	8	5	2	1	6	27	
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
21.	Polencsár Enikő	2	10	1	2	2	10	27	
	Herman Ottó Gimnázium, Miskolc, Magyarország								
22.	Borvák Annamária	5	10	3	1	1	6	26	
	Selye János Gimnázium, Révkomárom, Felvidék								
23.	Szalai Péter	6	8	3	2	1	3	23	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
24.	Hangay Laura	7	8	4	1	1	1	22	
	Árpád Fejedelem Gimnázium és Ált. Isk., Pécs, Magyarország								
25.	Zabos Péter	4	8	1	2	1	6	22	
	November 11-e Ált. Isk., Zenta, Délvidék								
26.	Hrdlovics Anita	5	8	3	1	1	3	21	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
27.	Lenkey Gábor	3	8	3	1	1	5	21	
	Tornaljai Gimnázium, Felvidék								
28.	Varga Csilla	1	8	3	1	1	3	17	
	Vámbéry Ármin Gimnázium, Dunaszerdahely, Felvidék								
29.	Kis Örs Máté	1	8	3	1	1	2	16	
	Batthyány-Strattmann László Alapiskola, Felbár, Felvidék								
30.	Paraszti Anna Csenge	1	8	4	1	1	1	16	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
31.	Bagu Ádám	1	8	3	1	1	1	15	
	Bátyui Középiskola, Kárpátalja								
32.	Györke Zsófia	1	8	3	1	1	1	15	
	Nagygejőci Általános Iskola, Kárpátalja								
33.	Vaskeba László	2	8	1	1	1	1	14	
	Bethlen Gábor Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja								
34.	Szűcs Gellert Péter	1	2	4	1	1	3	12	
	Bethlen Gábor Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja								
35.	Bozsó Szintia	1	2	3	1	1	2	10	
	Miroszlav Antity Ált. Isk., Palics, Délvidék								

7. (8.) évfolyam

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Helyezés
1.	Péter István	8	10	5	10	10	9	52	1.
	József Attila Általános Iskola, Csíkszereda, Erdély								
2.	Hermann Péter Pál	10	10	3	10	8	10	51	1.
	Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét, Magyarország								
3.	Fazakas Borbála	10	10	6	8	5	10	49	2.
	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár, Erdély								
4.	Garfild Adrienn	3	10	5	8	10	10	46	2.
	János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár, Erdély								
5.	Mikulás Zsófia	10	10	5	10	5	6	46	2.
	Kodály Zoltán Ének-Zenei Ált. Isk. és Gimn., Kecskemét, Magyarország								
6.	Rancz Máté	10	9	2	10	3	10	44	3.
	Nagy Imre Általános Iskola, Csíkszereda, Erdély								
7.	Csertán András	10	4	3	10	6	10	43	3.
	Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa, Magyarország								
8.	Tokovics Dávid	10	8	3	10	2	10	43	3.
	Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét, Magyarország								
9.	Kurunczi Viktória	1	10	7	10	4	10	42	3.
	Csíky Gergely Nemzeti Kollégium, Arad, Erdély								
10.	Apró János	9	10	2	8	1	10	40	3.
	Október 10-e Ált. Isk., Szabadka, Délvidék								
11.	Marica Edina	1	10	2	10	5	10	38	Dics.
	Áprily Lajos Nemzeti Kollégium, Brassó, Erdély								
12.	Tamás Nándor Károly	8	10	3	1	8	8	38	Dics.
	Kelemen Didák Általános Iskola, Kézdialmás, Erdély								
13.	Sebe Anna	8	8	2	6	2	10	36	Dics.
	Katona József Gimnázium, Kecskemét, Magyarország								
14.	Horvát Krisztofer Zoltán	10	3	2	8	2	10	35	Dics.
	Derceni Középiskola, Kárpátalja								
15.	Erdei Csongor	1	10	5	6	2	10	34	Dics.
	Miskolczy Károly Általános Iskola, Micske, Erdély								
16.	Makukoricás Benedek	10	6	2	8	1	7	34	Dics.
	Márai Sándor Gimnázium és Alapiskola, Kassa, Felvidék								
17.	Lukács Márton Örs	10	4	3	3	3	10	33	Dics.
	Nagy István Művészeti Líceum, Csíkszereda, Erdély								
18.	Jávorka András	8	7	1	10	2	3	31	Dics.
	Katona József Gimnázium, Kecskemét, Magyarország								
19.	Kozmér Barbara	6	2	1	10	2	10	31	Dics.
	Széchényi István Alapiskola, Felsőszeli, Felvidék								

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Helyezés
20.	Popa-Müller Victor	10	1	2	6	2	10	31	Dics.
	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely, Erdély								
21.	Tempfli Levente	10	4	2	10	2	3	31	Dics.
	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti, Erdély								
22.	Eke Máté	4	2	4	1	9	10	30	Dics.
	Amade László Alapiskola, Bős, Felvidék								
23.	Bukor Benedek	8	3	1	4	3	10	29	Dics.
	Selye János Gimnázium, Révkomárom, Felvidék								
24.	Szögi Roland	8	1	2	6	2	10	29	Dics.
	Kis Ferenc Ált. Isk., Orom, Délvidék								
25.	Molnár Alexandra	1	8	2	1	6	10	28	
	Felvidék								
26.	Salánki Miklós	10	4	3	4	2	5	28	
	Felvidék								
27.	Zsoldos Zsuzsanna	1	4	1	10	1	10	27	
	Tiszakeresztúri Általános Iskola, Kárpátalja								
28.	Makai Béla	1	2	1	10	2	10	26	
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
29.	Balogh Benedek	10	1	1	1	2	10	25	
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
30.	Nagy Örs	6	2	1	3	3	10	25	
	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely, Erdély								
31.	Balla Bence	4	1	1	6	2	10	24	
	Herman Ottó Gimnázium, Miskolc, Magyarország								
32.	Nagy Kinga	1	6	2	1	2	10	22	
	Kizur István Ált. Isk., Szabadka, Délvidék								
33.	Rúzsa Ákos	1	1	1	6	2	10	21	
	November 11-e Ált. Isk., Zenta, Délvidék								
34.	Manczal Dóra	1	8	2	4	2	3	20	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
35.	Cirok Balázs	1	4	1	1	1	10	18	
	Nikola Tesla Ált. Isk., Topolya, Délvidék								
36.	Matula Árpád	6	1	1	1	2	7	18	
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
37.	Bátori Szilvia	1	3	1	1	1	10	17	
	Kókai Imre Ált. Isk., Temerin, Délvidék								
38.	Kiss Angelika	1	2	1	1	3	8	16	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Helyezés
39.	Rice Róbert	2	1	2	4	1	5	15	
	Ady Endre Ált. Isk., Totda								
40.	Danter Benjamin	1	1	2	1	2	7	14	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
41.	Bogos Dorina	2	2	2	1	2	4	13	
	III. Béla Gimnázium, Baja, Magyarország								
42.	Karsai Levente	1	1	1	1	1	8	13	
	III. Béla Gimnázium, Baja, Magyarország								
43.	Korondi Gábor	2	1	1	1	3	4	12	
	Katona József Gimnázium, Kecskemét, Magyarország								
44.	Weinhard Ádám	3	1	2	1	2	3	12	
	Katona József Gimnázium, Kecskemét, Magyarország								
45.	Kovács Marcell	1	1	1	3	2	3	11	
	Katona József Gimnázium, Kecskemét, Magyarország								
46.	Csábi Dániel	1	1	1	1	2	3	9	
	Kossuth Lajos Gimnázium, Cegléd								
47.	Hliva Gabriella	1	1	1	1	2	3	9	
	II. Rákóczi Ferenc Középiskola, Vár, Kárpátalja								
48.	Martin Dominika	1	1	2	1	1	3	9	
	II. Rákóczi Ferenc Középiskola, Vár, Kárpátalja								

8. (9.) évfolyam

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Eredmény
1.	Gáspár Attila	10	9	10	9	10	10	58	1.
	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc, Magyarország								
2.	Simon Dániel Gábor	10	10	10	6	1	10	47	2.
	Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét, Magyarország								
3.	Bálint Hunor Ferenc	10	3	10	5	7	10	45	2.
	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy, Erdély								
4.	Szinyéri Bence	10	9	10	5	3	8	45	2.
	Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa, Magyarország								
5.	Szőcs Orsolya	10	2	10	4	10	8	44	2.
	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár, Erdély								
6.	Vadon Enikő	10	10	9	1	3	10	43	2.
	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc, Magyarország								
7.	Busa Máté	10	10	10	2	2	8	42	2.
	Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa, Magyarország								
8.	Petres Sára	10	5	10	4	10	3	42	3.
	Kiss Ferenc Általános Iskola, Csíkmadaras, Erdély								
9.	Baranyai István Dávid	5	9	10	4	3	10	41	3.
	10-es sz. Általános Iskola, Szatmárnémeti, Erdély								
10.	Szabó Liza	10	3	10	7	3	8	41	3.
	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár, Erdély								
11.	Bartis Zsolt	10	4	10	4	3	8	39	3.
	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely, Erdély								
12.	Pszota Máté	10	10	9	1	1	8	39	3.
	Bartók Béla Alapiskola, Nagymegyer, Felvidék								
13.	Pákoki Tamás	7	5	10	4	3	9	38	3.
	Felvidék								
14.	Bakó Bence	10	9	10	4	1	3	37	3.
	Váradi József Általános Iskola, Sepsiszentgyörgy, Erdély								
15.	Záhorsky Ákos	10	4	10	1	1	10	36	3.
	Pongrácz Lajos Alapiskola, Ipolyság, Felvidék								
16.	Dáni Eszter	10	3	10	4	2	3	32	Dics.
	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely, Erdély								
17.	Vita Henrietta	10	1	10	7	1	2	31	Dics.
	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely, Erdély								
18.	Osváth Tamás	10	2	10	4	3	1	30	Dics.
	Avram Iancu Sportiskola, Zilah, Erdély								
19.	Katona Bugner Attila	10	2	10	1	3	3	29	Dics.
	Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár, Erdély								

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Helyezés
20.	Macejko Dávid	10	2	10	1	3	3	29	Dics.
	Lakszakálosi Alapiskola, Felvidék								
21.	Bogdándi Lilla	10	2	10	3	1	2	28	Dics.
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
22.	Debreceni Ákos	5	9	10	2	1	1	28	Dics.
	Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc, Magyarország								
23.	Édes Lili	10	2	10	1	3	2	28	Dics.
	Marianum Egyházi Iskolaközpont, Révkomárom, Felvidék								
24.	Faber Levente	10	1	6	1	1	8	27	Dics.
	Márai Sándor Gimnázium és Alapiskola, Kassa, Felvidék								
25.	Kovács Imola	10	2	10	1	2	1	26	Dics.
	Szonya Marinkovity Ált. Isk., Nagybecskerek, Délvidék								
26.	Sétáló Denisa	10	2	9	1	1	3	26	Dics.
	Nikola Tesla Ált. Isk., Topolya, Délvidék								
27.	Bánki Bence	7	2	10	1	2	3	25	
	Vámbéry Ármin Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
28.	Klučka Vivien	6	5	7	1	1	3	23	
	Munka Utcai Alapiskola, Révkomárom, Felvidék								
29.	Lőrincz Flórián	10	2	6	1	3	1	23	
	Kazinczy Ferenc Alapiskola, Tornalja, Felvidék								
30.	Markó Anna	1	1	9	1	3	7	22	
	Széchényi István Alapiskola, Felsőszeli, Felvidék								
31.	Czibor Dóra	7	1	10	1	1	1	21	
	Munka Utcai Alapiskola, Révkomárom, Felvidék								
32.	Zsöllér Dániel	3	2	10	1	3	1	20	
	III. Béla Gimnázium, Baja, Magyarország								
33.	Finta Klára Enikő	10	2	2	1	2	2	19	
	János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár, Erdély								
34.	Molnár Imre	6	1	8	1	1	2	19	
	Kossányi József Alapiskola és Óvoda, Szentpéter, Felvidék								
35.	Héger Dániel	2	2	9	1	1	3	18	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
36.	Nagy György János	6	1	6	1	1	3	18	
	Petőfi Sándor Ált. Isk., Hajdújárás, Délvidék								
37.	Szerednik László	1	2	8	1	3	3	18	
	Gyulai Általános Iskola, Kárpátalja								
38.	Lázár Júlia	5	2	4	1	3	2	17	
	Szonya Marinkovity Ált. Isk., Nagybecskerek, Délvidék								

Sz.	Név	1	2	3	4	5	6	Összesen	Helyezés
39.	Vass Mátyás	5	1	7	1	1	1	16	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
40.	Csősz Viola	1	2	9	1	1	1	15	
	Kecskeméti Református Ált. Isk., Magyarország								
41.	Göndör Gergely	1	1	10	1	1	1	15	
	Széchényi István Alapiskola, Felsőszeli, Felvidék								
42.	Tar Zoltán	5	1	4	2	2	1	15	
	Bethlen Gábor Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja								
43.	Fenyvesi Janka	2	1	7	1	1	1	13	
	November 11-e Ált. Isk., Zenta, Délvidék								
44.	Jásper Boglárka	1	1	7	1	1	2	13	
	Árpád Fejedelem Gimnázium és Ált. Isk., Pécs, Magyarország								
45.	Kis Ferenc	5	2	1	1	1	3	13	
	Gyulai Általános Iskola, Kárpátalja								
46.	Pukli Réka	2	1	4	2	1	3	13	
	Árpád Fejedelem Gimnázium és Ált. Isk., Pécs, Magyarország								
47.	Valtner Viktor Patrik	1	2	1	2	2	1	9	
	Árpád Fejedelem Gimnázium és Ált. Isk., Pécs, Magyarország								
48.	Takáts Kornél	1	1	1	1	2	2	8	
	Szabó Gyila Alapiskola, Dunaszerdahely, Felvidék								
49.	Balogh Dániel	2	1	1	1	1	1	7	
	Árpád Fejedelem Gimnázium és Ált. Isk., Pécs, Magyarország								
50.	Herold Bianka	2	1	1	1	1	1	7	
	Batthyány-Strattmann László Alapiskola, Felbár, Felvidék								
51.	Molnár Levente	1	1	1	1	1	1	6	
	Árpád Fejedelem Gimnázium és Ált. Isk., Pécs, Magyarország								
52.	Sebők Luca	1	1	1	1	1	1	6	
	Árpád Fejedelem Gimnázium és Ált. Isk., Pécs, Magyarország								